1. Введение

Абстрактной приближенной схемой будем называть параметрическое семейство задач, аппроксимирующих исходную абстрактную задачу.

Абстрактная задача может быть сформулирована следующим образом: в некотором множестве нужно найти элемент, удовлетворяющий заданным условиям. Наиболее часто встречается случай, когда эти условия можно записать в виде операторного уравнения

$$F(x) = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{1.1}$$

где $F : X \to Y$ — отображение (или оператор), действующее из множества X в множество Y. Если Y — линейное пространство, то всегда можно считать, что в правой части уравнения (1.1) стоит нулевой элемент этого пространства. Слово "*аппроксимировать*" будем понимать как "заменить на близкий". При этом подразумевается, что аппроксимирующая задача проще для исследования, чем исходная. В каком смысле две задачи, два отображения или два множества следует считать близкими — уточним позже.

Пусть уравнение

$$\overline{F}(\overline{x}) = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{X}, \quad \overline{y} \in \overline{Y} \tag{1.2}$$

аппроксимирует уравнение (1.1), здесь множества $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ аппроксимируют множества X и Y, отображение $\overline{F} : \overline{X} \to \overline{Y}$ аппроксимирует отображение F.

Как правило, уравнения вида (1.2) по построению образуют *параметрическое семейство.* Чаще всего такое семейство представляет собой последовательность уравнений. Это легко увидеть, например, в случае, когда искомый элемент x — функция, а аппроксимирующий его элемент $\overline{x}$ — вектор, составленный из ее значений в некоторых фиксированных точках области определения или из коэффициентов разложения функции по некоторому базису. Таким образом, *последовательность аппроксимирующих уравнений* вида

$$\overline{F}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) = \overline{y}^{(n)}, \quad \overline{x}^{(n)} \in \overline{X}^{(n)}, \quad \overline{y}^{(n)} \in \overline{Y}^{(n)} \tag{1.3}$$

— *приближенная схема* для уравнения (1.1).

В *линейном случае* исходное операторное уравнение будем записывать в виде

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

здесь $A : X \to Y$ — линейный оператор, действующий из X в Y. Тогда аппроксимирующее уравнение имеет вид

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{X}, \quad \overline{y} \in \overline{Y}$$

и, следовательно, приближенная схема —

$$\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)} = \overline{y}^{(n)}, \quad \overline{x}^{(n)} \in \overline{X}^{(n)}, \quad \overline{y}^{(n)} \in \overline{Y}^{(n)}.$$

Абстрактная задача может быть поставлена не только в виде операторного уравнения, но и каким-либо другим способом. Например, как задача на собственные значения, или как экстремальная задача, или как-то еще. Заметим, что параметр семейства задач в приближенной схеме не обязательно должен быть целочисленным.

При хорошей аппроксимации вполне естественно ожидать, что основные свойства точной задачи переносятся на аппроксимирующую задачу, и наоборот. При этом, как уже было отмечено, подразумевается, что иметь дело с аппроксимирующей задачей существенно удобнее, чем с исходной.

Обратим внимание на то, что решение $\overline{x}$ аппроксимирующей задачи, вообще говоря, не принадлежит множеству X. Поэтому будем называть *приближенным решением* точной задачи (1.1) элемент $\widetilde{x}$ множества X, полученный в результате *интерполяции*. Интерполяция в определенном смысле является операцией, обратной к аппроксимации, — элемент $\widetilde{x}$ каким-то способом строится по элементу $\overline{x}$. Только если $\overline{X} \subset X$, то можно говорить, что $\overline{x}$ — приближенное решение.

Приведем несколько примеров приближенных схем, многие из них будут подробно разобраны в дальнейшем.

1. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (или, коротко, БСЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_{kj}\, x_j = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

при приближенном решении методом усечения заменяется на конечную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j = y_k, \quad k = 1\,.\,.\,n.$$

При этом бесконечномерный вектор $\{x_j\}$ (последовательность) аппроксимируется n-мерным вектором.

2. Метод Эйлера численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

состоит в следующем. Приближенные значения $\overline{y}_j,\ j = 1\,.\,.\,n$ искомой функции $y(x)$ в точках $x_j,\ j = 1\,.\,.\,n$ вычисляются по формуле

$$\overline{y}_{j+1} = \overline{y}_j + f(x_j, \overline{y}_j)(x_{j+1} - x_j),\ \ j = 0\,.\,.\,n-1; \quad \overline{y}_0 = y_0.$$

Интерполяционный полином $P_n(x)$, принимающий при $x = x_j$ значения $\overline{y}_j$, рассматривается как приближенное решение исходной задачи Коши.

3. При решении граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными методом разностных схем искомая в области функция заменяется на сеточную функцию — значения этой функции в выбранных в области точках (узлах интерполяции). Уравнение Пуассона в прямоугольнике D, например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

аппроксимируется СЛАУ вида

$$\frac{u_{k,j+1} + u_{k,j-1} - 2u_{k,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k+1,j} + u_{k-1,j} - 2u_{k,j}}{\Delta y^2} = f_{k,j},$$

$$k = 1\,.\,.\,n,\ j = 1\,.\,.\,m,$$

где $u_{k,j} = u(x_k, y_j),\ \ f_{k,j} = f(x_k, y_j);\ \ (x_k, y_j)$ — узлы интерполяции, причем $x_{k+1} = x_k + \Delta x,\ k = 0\,.\,.\,n-1$, $y_{j+1} = y_j + \Delta y,\ j = 0\,.\,.\,m-1$.

4. При численном решении интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$x(t) + \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau = f(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

также можно искать значения функции $x(t)$ в некоторых фиксированных точках (узлах) t_j, $j = 1\,..\,n$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Если заменим интеграл в левой части уравнения на конечную сумму по квадратурной формуле

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau \approx \sum_{j=1}^{n} A_j\, x(t_j)\, K(t_j, t)$$

и потребуем, чтобы уравнение было выполнено при всех $t = t_k$, $k = 1\,..\,n$, то получим СЛАУ

$$x(t_k) + \sum_{j=1}^{n} A_j\, x(t_j)\, K(t_j, t_k) = f(t_k), \quad k = 1\,..\,n.$$

5. Метод Галеркина приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода состоит в следующем. Выберем две независимые системы функций на (α, β): $\varphi_j(\cdot)$ и $\psi_j(\cdot)$, $j = 1\,..\,n$. Будем искать приближенное решение уравнения в виде

$$\widetilde{x}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \varphi_j(\cdot)$$

так, чтобы коэффициенты a_j удовлетворяли системе уравнений

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Big[\sum_{j=1}^{n} a_j \Big(\varphi_j(t) + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau - f(t) \Big) \Big]\, \psi_k(t)\, dt = 0, \quad k = 1\,..\,n.$$

Последовательность таких СЛАУ и образует приближенную схему.

Отметим, что точные и аппроксимирующие уравнения в примерах 1, 3, 4 и 5 — линейные, а в задаче 2 — нет. Легко видеть, что метод Галеркина можно распространить и на нелинейные интегральные уравнения, — этом аппроксимирующие уравнения также будут нелинейными.

Если исходная задача является математической моделью некоторого реального физического процесса, то оценивать качество приближенного решения можно, например, сравнивая его с экспериментальными данными. В общем случае нужно провести теоретическое исследование приближенной схемы и ответить при этом на ряд вопросов, связанных в первую очередь с *существованием и единственностью решений* точного и аппроксимирующего уравнений, а также с *погрешностью приближенного решения*, то есть с оценкой близости элементов x и $\widetilde{x}$. При этом важно установить *сходимость приближенной схемы*, то есть сходимость последовательности аппроксимирующих решений к точному решению. Кроме того, желательно оценить *скорость сходимости*, т. е. зависимость погрешности решения от параметра приближенной схемы.

2. Операторы и операторные уравнения. Линейные операторы

Пусть X и Y — два множества. Говорят, что на множестве $D(F) \subseteq X$ задано *отображение* (или *оператор*) F, действующее из X в Y, если каждому элементу $x \in D(F)$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$. Приняты такие обозначения: $F : X \to Y$ (*действует*) и $F : x \mapsto y$ (*поставлено в соответствие*). Множество $D(F)$ — *область определения* отображения F и $R(F) = \{y \in Y \mid y = F(x),\ x \in D(F)\}$ — *область значений* оператора F. Обычно предполагается, что $D(F) = X$ или $D(F)$ плотно в X.

Рассмотрим *операторное уравнение*

$$F(x) = y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Возможны три ситуации:
1) решение уравнения существует и единственно;
2) решение уравнения существует, но не единственно;
3) уравнение решений не имеет.
Ясно, что решения этого уравнения принадлежат $D(F)$. Кроме того, уравнение имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $y \in R(F)$. Поэтому найти условия существования решений и дать описание множества $R(F)$ — одна и та же задача.

Пусть $F : X \to Y$ — отображение. Рассмотрим подробнее соответствие между множествами $D(F)$ и $R(F)$. Каждому элементу $R(F)$ всегда можно поставить в соответствие хотя бы один элемент $D(F)$. Поэтому всегда можно указать хотя бы одно такое отображение $F_r^{-1} : Y \to X$ на $R(F)$, что $F \circ F_r^{-1} = I$ на $R(F)$ (здесь и далее I — тождественный оператор). Такое отображение называется *правым обратным* к F на $R(F)$ отображением. При этом $R(F_r^{-1}) \subseteq D(F)$.

Отображение $F_l^{-1} : Y \to X$ на $R(F)$ называется *левым обратным* к F на $R(F)$ отображением, если $F_l^{-1} \circ F = I$. Левое обратное отображение существует тогда и только тогда, когда при отображении F различным элементам X поставлены в соответствие различные элементы Y (инъекция), то есть соответствие между $D(F)$ и $R(F)$ взаимно однозначно. Действительно, если $F(x_1) = y$ и $F(x_2) = y$ при $x_1 \neq x_2$, то невозможно определить отображение F_l^{-1} так, чтобы равенства $(F_l^{-1} \circ F)(x_1) = x_1$ и $(F_l^{-1} \circ F)(x_2) = x_2$ выполнялись одновременно.

Если левое обратное отображение существует, то оно определяется однозначно. Легко видеть, что левое обратное отображение будет одновременно и правым обратным отображением. С другой стороны, правое обратное отображение будет одновременно левым обратным только в том случае, если оно единственное. При этом $R(F_r^{-1}) = D(F)$. Поэтому при взаимно однозначном соответствии между $D(F)$ и $R(F)$ достаточно рассматривать *обратное* отображение $F^{-1} : Y \to X$ к F на $R(F)$ (говорят также: двустороннее обратное). Это отображение будет и левым обратным, и правым обратным, причем $D(F^{-1}) = R(F)$, $R(F^{-1}) = D(F)$.

Пусть X — линейное пространство над полем K. Множество M называется *линейным множеством* (многообразием) в X, если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M \ \ \forall x_1, x_2 \in M$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$. Легко проверить, что любое линейное множество является линейным пространством. В каждом линейном множестве содержится нулевой элемент.

Пусть X и Y — линейные пространства. Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным* (линейным оператором), если 1) $D(A)$ — линейное множество; 2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in M, \ \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$. Область значений $R(A)$ линейного оператора тоже является линейным множеством. Вместо $A(x)$ принято писать просто $A\,x$.

Как следует из сказанного выше, для линейного оператора A всегда можно построить правое обратное отображение A_r^{-1}, но в общем случае не единственным образом. Кроме того, это отображение не обязательно будет линейным оператором. Если же существует левое обратное отображение для линейного оператора, то оно определяется однозначно и также является линейным оператором.

Часто предполагается, что обратные к линейному оператору отображения должны быть также линейными операторами, причем $D(A) = X$, $D(A_r^{-1}) = D(A_l^{-1}) = Y$. Тогда, легко видеть, если существует оператор A_r^{-1}, то *линейное операторное уравнение*

$$A\,x = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{2.1}$$

разрешимо при любой правой части (из Y). Если же существует A_l^{-1}, то уравнение (2.1) может иметь только одно решение. Говоря более точно, если оператор A имеет левый обратный, то уравнение (2.1) при $y \in R(A)$ имеет единственное решение, а при $y \notin R(A)$ решений, разумеется, нет.

Итак, если у оператора A существует левый обратный оператор, то он же является и обратным на $R(A)$, но на всем пространстве Y обратного оператора может и не быть.

Множество

$$N(A) = \{x \in D(A) \mid A\,x = 0\}$$

называется *множеством нулей* оператора A (или его *ядром*, обозначается $KerA$). Очевидно, что $0 \in N(A)$. Легко видеть, что (левый) обратный оператор существует тогда и только тогда, когда $N(A) = \{0\}$.

Пусть X и Y — нормированные пространства. Отображение $F : X \to Y$ называется *ограниченным на множестве* D, если оно переводит его в ограниченное множество. Отображение называется *ограниченным*, если

$$\exists M > 0 \quad | \quad ||F(x)|| \le M\,||x|| \quad \forall x \in D(F).$$

Очевидно, что при этом любое ограниченное в X множество из $D(F)$ переводится в ограниченное в Y множество. Как частный случай, линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен, если

$$\exists M > 0 \quad | \quad ||Ax|| \le M\,||x|| \quad \forall x \in D(A). \tag{2.2}$$

При $A \ne 0$ множество $R(A)$ не может быть ограниченным.

Отображение $F : X \to Y$ называется *непрерывным на элементе* $x_0 \in X$, если $F(x) \to F(x_0)$ при $x \to x_0$ (здесь достаточно предполагать, что X и Y — топологические пространства). Легко доказать, что линейный оператор непрерывен на каждом элементе $D(A)$ тогда и только тогда, когда он непрерывен на элементе 0. Следовательно, если линейный оператор ограничен, то он непрерывен. Обратное утверждение также имеет место.

Пусть $D(A) = X$. Легко проверить, что линейный оператор A ограничен тогда и только тогда, если

$$\exists M > 0 \quad | \quad ||Ax|| \le M \quad \forall x \in D(A),\ ||x|| \le 1,$$

то есть A ограничен на замкнутом единичном шаре (число M здесь то же самое, что в условии (2.2)). При этом существует конечное число

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||A\,x||}{||x||} = \sup_{||x|| \le 1} ||A\,x|| = \sup_{||x||=1} ||A\,x||$$

— *норма оператора* A в линейном пространстве линейных операторов, действующих из X в Y. Ясно, что $||A||$ — наименьшее из возможных чисел M в неравенстве (2.2). Таким образом,

$$||Ax|| \le ||A|| \cdot ||x|| \quad \forall x \in D(A). \tag{2.3}$$

Если $D(A) \neq X$, но множество $D(A)$ плотно в X, то оператор A можно по непрерывности продолжить на все пространство X и тогда

$$||A|| = \sup_{x \in D(A),\ ||x|| \le 1} ||A\,x||.$$

В ином случае у ограниченного линейного оператора норма корректно не определяется и, следовательно, неравенство (2.2) заменить на неравенство (2.3) невозможно.

Важным для дальнейшего является утверждение.

Лемма 2.1. *Линейный оператор A имеет ограниченный обратный на $R(A)$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists m > 0 \ | \ ||A\,x|| \ge m\,||x|| \ \forall x \in D(A). \tag{2.4}$$

Действительно (необходимость), пусть A^{-1} — ограниченный обратный оператор, то есть $A^{-1}A\,x = x \quad \forall x \in D(A)$ и $\exists M > 0 \ | \ ||A^{-1}y|| \le M\,||y|| \quad \forall y \in R(A)$. Пусть $y = A\,x$. Тогда $||x|| \le M\,||A\,x||$ или $||A\,x|| \ge 1/M\,||x||$. Получили, что неравенство (2.4) выполнено при $m = 1/M$.

С другой стороны (достаточность), пусть условие (2.4) выполнено. Предположим, что $x \in N(A)$. Тогда $||x|| \le 1/m\,||A\,x|| = 0$ и, следовательно, $x = 0$. Так как $N(A) = \{0\}$, то существует обратный оператор A^{-1}.

Пусть $x = A^{-1}y$. Тогда $||A^{-1}y|| \le 1/m\,||A\,A^{-1}y|| = 1/m\,||y||$. Получили неравенства вида (2.2), где $M = 1/m$.

Отметим, что если у обратного оператора A^{-1} определена норма, то в неравенстве (2.4) можно считать $m = 1/||A^{-1}||$.

Если оператор A имеет обратный A^{-1} и корректно определены их нормы, то $||x||/||A^{-1}|| \le ||Ax|| \le ||A||\cdot||x||$. Следовательно, $||A^{-1}||\cdot||A|| \ge 1$. Это число называют мерой обусловленности оператора A.

3. Аппроксимация и интерполяция. Априорные оценки погрешности

Будем говорить, что *пространство $\overline{X}$ аппроксимирует пространство X*, если указаны такие линейные операторы $T_X\ :\ X \to \overline{X},\ S_X\ :\ \overline{X} \to X\ \ |\ \ T_X\,S_X = I$. Аналогично, пространство $\overline{Y}$ аппроксимирует пространство Y, если указаны такие линейные операторы $T_Y\ :\ Y \to \overline{Y},\ S_Y\ :\ \overline{Y} \to Y\ \ |\ \ T_Y\,S_Y = I$. Операторы T_X, T_Y будем называть *операторами аппроксимации*, а операторы S_X, S_Y — *операторами интерполяции.*

Элементы x и $\overline{x}$, y и $\overline{y}$ принадлежат разным пространствам. Поэтому для оценки их близости определим *S-погрешность решения* как $\|x - S_X\,\overline{x}\|$, *$T$-погрешность решения* как $\|T_X\,x - \overline{x}\|$, *$S$-погрешность правой части* как $\|y - S_Y\,\overline{y}\|$ и, наконец, *T-погрешность правой части* как $\|T_Y\,y - \overline{y}\|$. Покажем, как $S-$ и $T-$ погрешности связаны друг с другом.

Лемма 3.1.
Если оператор T_X ограничен, то $\|T_X\,x - \overline{x}\| \le \|T_X\| \cdot \|x - S_X\,\overline{x}\|$;
если оператор T_Y ограничен, то $\|T_Y\,y - \overline{y}\| \le \|T_Y\| \cdot \|y - S_Y\,\overline{y}\|$;
если оператор S_X ограничен, то
$$\|x - S_X\,\overline{x}\| \le \|S_X\| \cdot \|T_X\,x - \overline{x}\| + \|(S_X\,T_X - I)x\|;$$
если оператор S_Y ограничен, то
$$\|y - S_Y\,\overline{y}\| \le \|S_Y\| \cdot \|T_Y\,y - \overline{y}\| + \|(S_Y\,T_Y - I)y\|.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$T_X\,x - \overline{x} = T_X\,x - T_X\,S_X\overline{x} = T_X\,(x - S_X\,\overline{x}),$$

$$x - S_X\,\overline{x} = x - S_X\,T_X\,x + S_X\,T_X\,x - S_X\,\overline{x} = (I - S_X\,T_X)\,x + S_X\,(T_X\,x - \overline{x}).$$

Отсюда следуют первое и третье неравенства леммы. Второе и четвертое неравенства доказываются аналогичным образом. •

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор (определенный на линейном многообразии в X, аддитивный и однородный),

$$A\,x = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{3.1}$$

— линейное операторное уравнение.

Если пространства $\overline{X}$, $\overline{Y}$ аппроксимируют пространства X, Y, то любой линейный оператор $\overline{A}\ :\ \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *аппроксимирующим* оператор A, а уравнение

$$\overline{A}\,\overline{x} = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{X}, \quad \overline{y} \in \overline{Y} \tag{3.2}$$

— *аппроксимирующим* уравнение (3.1). При этом пространства X, Y, оператор A и уравнение (3.1) будем называть *точными*.

На рис. 1 показано, откуда и куда действуют рассматриваемые линейные операторы.

$$\begin{array}{ccccccc} & X & & \xrightarrow{A} & & Y & \\ T_X & \downarrow\uparrow & S_X & & T_Y & \downarrow\uparrow & S_Y \\ & \overline{X} & & \xrightarrow{\overline{A}} & & \overline{Y} & \end{array}$$

Рис. 1.

Получим априорные оценки погрешности приближенного решения (ничего пока не предполагая о существовании и единственности решений уравнений (3.1) и (3.2)).

Теорема 3.1. *Пусть $x \in D(A)$, $\overline{x} \in D(\overline{A})$ и $y = A\,x$, $\overline{y} = \overline{A}\,\overline{x}$. Если $S_X\,\overline{x} \in D(A)$, $x - S_X\,\overline{x} \notin N(A)$ и оператор S_Y ограничен, то $\exists L > 0$ |*

$$\|x - S_X\,\overline{x}\| \le L\Big\{\|S_Y\| \cdot \|T_Y\,y - \overline{y}\| + \|S_Y\| \cdot \|(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}\|$$

$$+\|(S_Y\,T_Y - I)\,A\,(x - S_X\,\overline{x})\|\Big\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Так как $0 \in N(A)$, то $x - S_X\,\overline{x} \neq 0$. Обозначим

$$L = \|x - S_X\,\overline{x}\| \,/\, \|A(x - S_X\,\overline{x})\|.$$

Тогда $\|x - S_X\,\overline{x}\| = L\,\|A(x - S_X\,\overline{x})\|$, при этом

$$A\,(x - S_X\,\overline{x}) = A\,(x - S_X\,\overline{x}) - S_Y\,T_Y\,A\,(x - S_X\,\overline{x}) +$$

$$+ S_Y\,T_Y\,y - S_Y\,\overline{y} + S_Y\,\overline{A}\,\overline{x} - S_Y\,T_Y\,A\,S_X\,\overline{x} =$$

$$= (I - S_Y\,T_Y)\,A\,(x - S_X\,\overline{x}) + S_Y\,(T_Y\,y - \overline{y}) + S_Y\,(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}. \quad \bullet$$

Замечание. На первый взгляд неравенство (3.3) не внушает доверия, так как S-погрешность решения присутствует в нем и слева, и справа — в числителе выражения L. Но если оператор A имеет ограниченный обратный, то есть $||Ax|| \geq m||x||$, то L заменяется на $1/m$. При этом $N(A) = \{0\}$, и условие $x - S_X\,\overline{x} \notin N(A)$ становится излишним, так как при $x - S_X\,\overline{x} = 0$ неравенство (3.3) теряет смысл (оно теперь выполняется при любом $L \geq 0$).

Пусть, кроме того, оператор A ограничен, $||Ax|| \leq M||x||$ и оператор $S_Y T_Y$ настолько близок к тождественному, что $||S_Y T_Y - I|| < 1/M$. Тогда из (3.3) следует, что

$$\|x - S_X\,\overline{x}\| \leq \frac{\|S_Y\|}{m(1 - M\|S_Y\,T_Y - I\|)}\Big(\|T_Y\,y - \overline{y}\| + \|(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}\|\Big).$$

Если имеют смысл нормы операторов A и A^{-1}, то получим

$$\|x - S_X\,\overline{x}\| \leq \frac{\|S_Y\| \cdot ||A^{-1}||}{1 - \|S_Y\,T_Y - I\| \cdot ||A||}\Big(\|T_Y\,y - \overline{y}\| + \|(\overline{A} - T_Y\,A\,S_X)\,\overline{x}\|\Big).$$

Неравенство (3.3) показывает, что приближенное решение $\widetilde{x} = S_X\overline{x}$ будет близким к точному решению x, если достаточно малы три слагаемых в правой части (3.3). Первое слагаемое определяет, насколько хорошо правая часть уравнения (3.2) аппроксимирует правую часть уравнения (3.1). Второе слагаемое оценивает близость операторов A и $\overline{A}$. Третье слагаемое показывает, насколько оператор $S_Y\,T_Y$ близок к тождественному. По значению правой части неравенства (3.3) можно судить, насколько близким является аппроксимирующее уравнение к точному уравнению.

Теорема 3.2. *Пусть* $x \in D(A)$, $\overline{x} \in D(\overline{A})$ *и* $y = A\,x$, $\overline{y} = \overline{A}\,\overline{x}$. *Если* $T_X\,x \in D(\overline{A})$, $T_X\,x - \overline{x} \notin N(\overline{A})$ *и оператор* T_Y *ограничен, то* $\exists L > 0 \ |$

$$\|T_X\,x - \overline{x}\| \leq L\Big\{\|T_Y\,y - \overline{y}\| + \|T_Y\| \cdot \|(A - S_Y\,\overline{A}\,T_X)\,x\|\Big\}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть

$$L = \|T_X\,x - \overline{x}\| \,/\, \|\overline{A}\,(T_X\,x - \overline{x})\|.$$

Тогда $\|T_X\,x - \overline{x}\| = L\,\|\overline{A}\,(T_X\,x - \overline{x})\|$, при этом

$$\overline{A}\,(T_X\,x - \overline{x}) = T_Y\,S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x - T_Y\,A\,x + T_Y\,y - \overline{y}. \quad \bullet$$

Замечание. Если оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный обратный, то можно выбрать $L = 1/\|\overline{A}^{-1}\|$. Тогда не нужно предполагать, что $T_X\,x - \overline{x} \notin N(\overline{A})$.

4. Условия единственности решений

Покажем, что если точный и аппроксимирующий операторы достаточно близки друг к другу, то они одновременно обратимы, точнее имеют ограниченные (левые) обратные операторы. Напомним, что оператор A имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда

$$\exists m > 0 \quad | \quad ||Ax|| \geq m\,||x|| \quad \forall x \in D(A) \tag{4.1}$$

и оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда

$$\exists \overline{m} > 0 \quad | \quad ||\overline{A}\,\overline{x}|| \geq \overline{m}\,||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}). \tag{4.2}$$

При оценках снизу норм элементов будем использовать два простых неравенства

$$||x|| \geq ||y|| - ||x - y|| \qquad \text{и} \qquad ||x|| \geq \frac{||Ax||}{||A||} \quad (||A|| \neq 0).$$

Теорема 4.1. *Пусть* $S_X\overline{x} \in D(A) \quad \forall\,\overline{x} \in D(\overline{A})$ *и операторы* S_Y *и* T_X *ограничены. Пусть оператор* A *имеет ограниченный обратный и выполняются условия*

$$||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}|| \le m_1\, ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{4.3}$$

$$||(S_Y\, T_Y - I)\, A\, S_X\, \overline{x}|| \le m_2\, ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{4.4}$$

(постоянные m_1 *и* m_2 *не зависят от* $\overline{x}$*). Если*

$$(m_1\, ||S_Y|| + m_2)\, ||T_X|| < m, \tag{4.5}$$

то оператор $\overline{A}$ *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Пусть $\overline{x} \in D(\overline{A})$. Оценим

$$||\overline{A}\, \overline{x}|| \ge ||T_Y\, A\, S_X\, \overline{x}|| - ||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}||,$$

при этом

$$||T_Y\, A\, S_X\, \overline{x}|| \ge \frac{1}{||S_Y||}\, ||S_Y\, T_Y\, A\, S_X\, \overline{x}|| \ge$$

$$\ge \frac{1}{||S_Y||}\Big(||A\, S_X\, \overline{x}|| - ||(S_Y\, T_Y - I)\, A\, S_X\, \overline{x}||\Big)$$

и

$$||A\, S_X\, \overline{x}|| \ge m_0\, ||S_X\, \overline{x}|| \ge \frac{m_0}{||T_X||}\, ||T_X\, S_X\, \overline{x}|| = \frac{m_0}{||T_X||}\, ||\overline{x}||.$$

Следовательно,

$$||\overline{A}\, \overline{x}|| \ge \left(\frac{1}{||S_Y||}\, \Big(\frac{m_0}{||T_X||} - m_2\Big) - m_1\right) ||\overline{x}|| = \overline{m}\, ||\overline{x}||,$$

где

$$\overline{m} = \frac{m - (m_1\, ||S_Y|| + m_2)\, ||T_X||}{||S_Y|| \cdot ||T_X||}.$$

Если выполнено неравенство (4.5), то $\overline{m} > 0$. •

Замечание. Если область определения некоторого оператора $B \ : X \to Y$ не совпадает с X или не является плотным в X множеством, то из неравенства $||B\, x|| \le \ \mathrm{const}\ ||x|| \quad \forall x \in D(B)$ не следует, что норма оператора B ограничена (хотя бы потому, что эта норма может и не быть определена). По этой причине условия (4.3) и (4.4) даны именно в такой форме.

Теорема 4.2. *Пусть* $T_X\,x \in D(\overline{A}) \quad \forall x \in D(A)$ *и операторы* S_X *и* T_Y *ограничены. Пусть оператор* $\overline{A}$ *имеет ограниченный обратный и выполняются условия*

$$||(A - S_Y\,\overline{A}\,T_X)\,x|| \le \overline{m}_1\,||x|| \quad \forall x \in D(A), \tag{4.6}$$

$$||(S_X\,T_X - I)\,x|| \le \overline{m}_2\,||x|| \quad \forall x \in D(A), \tag{4.7}$$

(постоянные $\overline{m}_1$ *и* $\overline{m}_2$ *не зависят от* x*). Если*

$$\overline{m}_1\,||S_X|| \cdot ||T_Y|| < \overline{m}(1 - \overline{m}_2), \tag{4.8}$$

то оператор A *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Пусть $x \in D(A)$. Оценим

$$||A\,x|| \ge ||S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x|| - ||(A - S_Y\,\overline{A}\,T_X)\,x||,$$

при этом

$$||S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x|| \ge \frac{1}{||T_Y||}\,||\overline{A}\,T_X\,x|| \ge \frac{\overline{m}_0}{||T_Y||}\,||T_X\,x|| \ge \frac{\overline{m}_0}{||T_Y|| \cdot ||S_X||}\,||S_X\,T_X\,x||$$

и

$$||S_X\,T_X\,x|| \ge ||x|| - ||(I - S_X\,T_X)\,x||.$$

Следовательно,

$$||A\,x|| \ge \left(\frac{\overline{m}_0}{||T_Y|| \cdot ||S_X||}\,(1 - \overline{m}_2) - \overline{m}_1\right)||x|| = m\,||x||,$$

где

$$m = \frac{\overline{m}(1 - \overline{m}_2) - \overline{m}_1\,||T_Y|| \cdot ||S_X||}{||T_Y|| \cdot ||S_X||}.$$

Если выполнено неравенство (4.8), то $m > 0$. •

Следствие 4.1. *Пусть определены нормы обратных операторов* A^{-1} *и* $\overline{A}^{-1}$*. Если выполнены условия теоремы 4.1, то*

$$||\overline{A}^{-1}|| \le \frac{||S_Y||\,||T_X||\,||A^{-1}||}{1 - (m_1\,||S_Y|| + m_2)\,||T_X||\,||A^{-1}||}.$$

Если выполнены условия теоремы 4.2, то

$$||A^{-1}|| \le \frac{||T_Y||\,||S_X||\,||\overline{A}^{-1}||}{1-\overline{m}_2-\overline{m}_1\,||T_Y||\,||S_X||\,||\overline{A}^{-1}||}.$$

Знать, что аппроксимирующий оператор имеет обратный оператор, важно по следующей причине. Если пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ конечномерные и имеют одну и ту же размерность, то аппроксимирующее уравнение представляет собой СЛАУ. Известно, что ее решение существует при любой правой части, если доказано, что эта система может иметь только одно решение (из единственности решения следует его существование). Именно такой случай наиболее часто встречается на практике. В бесконечномерном случае аналогичное утверждение также имеет место, если $\overline{A}$ — оператор Фредгольма или оператор, для которого выполняется хотя бы только альтернатива Фредгольма. Но в общем случае из того, что существует решение точного уравнения с правой частью y, вовсе не следует, что существует решение аппроксимирующего уравнения с правой частью $T_Y\,y$.

5. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

Покажем, как проверяются условия теоремы 4.1 при исследовании приближенных методов решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Пусть точное уравнение

$$(Ax)(t) \equiv x(t) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\tau)\,K(\tau,t)\,d\tau = y(t), \quad t\in[\alpha,\beta].$$

5.1. Метод механических квадратур

Пусть точные пространства

$$X = Y = C([\alpha,\beta]), \quad ||x(\cdot)|| = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |x(t)|.$$

Зададим узлы аппроксимации $t_1,\dots t_n$ на $[\alpha,\beta]$. Пусть оператор аппроксимации

$$T : x(\cdot) \mapsto \overline{x} = (x(t_1),\dots,x(t_n)),$$

оператор интерполяции (кусочно–линейная интерполяция)

$$S : \overline{x} \mapsto \widetilde{x}(t) = \overline{x}_j \, \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} + \overline{x}_{j+1} \, \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}]$$

и аппроксимирующие пространства

$$\overline{X} = \overline{Y} = R^n, \quad \|\overline{x}\| = \max_j |\overline{x}_j| \quad \text{(кубическая норма)}.$$

Легко видеть, что $||T x\,(\cdot)|| \le ||x(\cdot)||$ и $||S\,\overline{x}|| \le ||\widetilde{x}||$ (т. е. операторы T и S ограничены). Более того, $||T|| = ||S|| = 1$.

Аппроксимирующее уравнение (использована квадратурная формула трапеций)

$$(\overline{A}\,\overline{x})_k \equiv \overline{x}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\overline{x}_j \, K(t_j, t_k) + \overline{x}_{j+1} \, K(t_{j+1}, t_k) \Big] \, (t_{j+1} - t_j) = \overline{y}_k$$

при $k = 1 \,..\, n$. Обозначим

$$\delta = \max_{j=1..n-1} (t_{j+1} - t_j).$$

Для оценок будем использовать *модуль непрерывности* (см., например, [КА.ФА], с.49)

$$\omega(x(\cdot), \delta) = \max_{|t' - t''| < \delta} |x(t') - x(t'')|, \quad 0 < \delta < \beta - \alpha \quad (t', t'' \in [\alpha, \beta]).$$

Это выражение корректно определено для любой непрерывной функции $x(\cdot)$. Основные свойства модуля непрерывности следующие:
1) $\omega(x(\cdot), \delta)$ — неубывающая функция от δ;
2) $\omega(x(\cdot), \delta_1 + \delta_2) \le \omega(x(\cdot), \delta_1) + \omega(x(\cdot), \delta_2)$;
3) функция $x(\cdot)$ непрерывна на отрезке тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(x(\cdot), \delta) = 0.$$

При преобразовании выражений будем использовать также очевидные тождества

$$\frac{t_{k+1} - \tau}{t_{k+1} - t_k} + \frac{\tau - t_k}{t_{k+1} - t_k} = 1, \tag{5.1}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j} \, d\tau = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j} \, d\tau = \frac{t_{j+1} - t_j}{2}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим неравенство (4.3) из теоремы 4.1. Оценим выражение

$$||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}|| =$$

$$= \max_k \left| \overline{x}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \Big[\overline{x}_j\, K(t_j, t_k) + \overline{x}_{j+1}\, K(t_{j+1}, t_k) \Big]\, (t_{j+1} - t_j) - \right.$$

$$\left. - \overline{x}_k - \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\overline{x}_j \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j} + \overline{x}_{j+1} \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right] K(\tau, t_k)\, d\tau \right|.$$

Из (5.2) следует, что

$$||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\overline{x}|| =$$

$$= \max_k \left| \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left\{ \overline{x}_j \Big[K(t_j, t_k) - K(\tau, t_k) \Big] \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \overline{x}_{j+1} \Big[K(t_{j+1}, t_k) - K(\tau, t_k) \Big] \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right\} d\tau \right| \le$$

$$\le \max_k \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ |\overline{x}_j|\ \omega(K(\cdot, t_k), \delta) \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + |\overline{x}_{j+1}|\ \omega(K(\cdot, t_k), \delta) \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j}\, d\tau \right\} \le$$

$$\le (\beta - \alpha)\, \omega(K(\cdot, \cdot), \delta)\ ||\overline{x}||.$$

Таким образом,

$$m_1 = m_1(n) = (\beta - \alpha)\, \omega(K(\cdot, \cdot), \delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \tag{5.3}$$

(непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной).

Рассмотрим неравенство (4.4) из теоремы 4.1. Оценим выражение $||(S_Y\, T_Y - I)\, A\, S_X\, \overline{x}||$. Если $z(\cdot) \in Y$, то

$$S_Y\, T_Y\, z(t) = z(t_k)\, \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} + z(t_{k+1})\, \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Пусть

$$z(t) = A\,S_X\,\overline{x} = \widetilde{x}_k(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau)\,K(\tau,t)\,d\tau, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

где

$$\widetilde{x}_k(t) = \overline{x}_k\,\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} + \overline{x}_{k+1}\,\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Тогда

$$||(S_Y\,T_Y - I)\,A\,S_X\,\overline{x}|| = \max_{k=1..n-1}\ \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} |S_Y\,T_Y\,z(t) - z(t)|.$$

При $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$S_Y\,T_Y\,z(t) - z(t) = z(t_k)\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} + z(t_{k+1})\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} - z(t) =$$

$$= \Big[\overline{x}_k + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau)K(\tau,t_k)d\tau\Big]\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} +$$

$$+ \Big[\overline{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau)K(\tau,t_{k+1})d\tau\Big]\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} -$$

$$-\widetilde{x}_k(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau)K(\tau,t)d\tau.$$

Умножим последний интеграл на правую часть формулы (5.1). Получим

$$S_Y\,T_Y\,z(t) - z(t) =$$

$$= \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\ \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau)\Big[K(\tau,t_k) - K(\tau,t)\Big]\,d\tau +$$

$$+ \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\ \sum_{j=1}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau)\Big[K(\tau,t_{k+1}) - K(\tau,t)\Big]\,d\tau.$$

Так как

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{x}_j(\tau) d\tau \leq ||\overline{x}|| \, (t_{j+1} - t_j),$$

то

$$||(S_Y \, T_Y - I) \, A \, S_X \, \overline{x}|| \leq (\beta - \alpha) \, \omega(K(\cdot, \cdot), \delta) \, ||\overline{x}||$$

и

$$m_2 = m_2(n) = (\beta - \alpha) \, \omega(K(\cdot, \cdot), \delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \qquad (5.4)$$

Из формул (5.3) и (5.4) следует, что начиная с некоторого n неравенство (4.5) из теоремы 4.1 будет выполнено.

5.2. Метод Галеркина (метод моментов)

Пусть $X = Y = L_2(\alpha, \beta)$,

$$||x(\cdot)||^2 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^2 \, dt$$

(интеграл понимается в смысле Лебега) и $< x(\cdot), y(\cdot) >$ — скалярное произведение функций в пространстве $L_2(\alpha, \beta)$. Пусть $\varphi_j(\cdot)$ — ортонормированная система функций в $L_2(\alpha, \beta)$, то есть $< \varphi_k(\cdot), \varphi_j(\cdot) >= \delta_{kj}$. Любому элементу $x(\cdot) \in L_2(\alpha, \beta)$ можно поставить в соответствие последовательность коэффициентов Фурье $< x(\cdot), \varphi_j(\cdot) >$ и (формальный) ряд Фурье

$$\sum_{j=1}^{+\infty} < x(\cdot), \varphi_j(\cdot) > \; \varphi_j(\cdot).$$

Пусть

$$T \; : \; x(\cdot) \mapsto \overline{x} = (< x(\cdot), \varphi_1(\cdot) >, \ldots, < x(\cdot), \varphi_n(\cdot) >)$$

(вектор из первых n коэффициентов Фурье) и

$$S \; : \; \overline{x} \mapsto \widetilde{x}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \, \varphi_j(\cdot)$$

(частная сумма ряда Фурье). При этом $\overline{X} = \overline{Y} = R^n$ со сферической нормой

$$||\overline{x}||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\overline{x}_j|^2.$$

Метод Галеркина состоит в следующем: приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода ищем в виде

$$\widetilde{x}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \, \varphi_j(\cdot).$$

Подставим это выражение в уравнение и умножим скалярно обе части на $\varphi_k(\cdot)$, $k = 1 \, . \, . \, n$. Получим аппроксимирующую СЛАУ

$$\overline{A}\,\overline{x} \equiv \overline{x}_k + \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \, K_{kj} = \overline{y}_k, \quad k = 1 \, . \, . \, n,$$

$$K_{kj} = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} K(\tau, t)\, \varphi_j(\tau)\, \varphi_k(t)\, d\tau\, dt.$$

Рассмотрим неравенство (4.3) из теоремы 4.1. Все компоненты вектора $\overline{z} = (\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}$ равны нулю:

$$\overline{z}_k = \overline{x}_k - < \widetilde{x}(\cdot) + \int_{\alpha}^{\beta} \widetilde{x}(\tau)\, K(\tau, \cdot)\, d\tau, \varphi_k(\cdot) >= 0.$$

Поэтому $||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}|| = 0$ и неравенство (4.3) выполняется при любом $m_1 \geq 0$ (но, конечно, можно принять, что $m_1 = 0$).

Рассмотрим неравенство (4.4) из теоремы 4.1. Пусть $z(\cdot) \in L_2(\alpha, \beta)$. Тогда функция

$$(I - S_Y\, T_Y) z(\cdot) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} < z(\cdot), \varphi_k(\cdot) > \ \varphi_k(\cdot)$$

— остаток ряда Фурье функции $z(\cdot)$. При

$$z(t) = A S_X \overline{x} =$$

$$= \widetilde{x}(t) + \int_{\alpha}^{\beta} \widetilde{x}(\tau) K(\tau, t)\, d\tau = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \left[\varphi_j(t) + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_j(\tau)\, K(\tau, t)\, d\tau\right]$$

получим

$$(I - S_Y\, T_Y) z(\cdot) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j\, K_{kj}\right) \varphi_k(\cdot).$$

Из неравенства Гельдера

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\ \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

следует, что

$$||(S_Y\,T_Y - I)\,A\,S_X\,\overline{x}||^2 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |(I - S_Y\,T_Y)\,z(t)|^2\,dt = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j\,K_{kj}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} |\overline{x}_j|^2\ \sum_{j=1}^{n} |K_{kj}|^2\right) \le m_2^2\ \|\overline{x}\|^2,$$

где

$$m_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} |K_{kj}|^2 \le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} |K_{kj}|^2 \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty.$$

Как и в случае метода механических квадратур, начиная с некоторого n неравенство (4.5) из теоремы 4.1 будет выполнено.

Таким образом, мы доказали следующее. *Если интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода может иметь только одно решение, то аппроксимирующая его СЛАУ при достаточно большом n имеет решение и только одно.*

6. Существование решений. Квазирешения. Оценки невязок

Итак, *приближенный метод* решения линейного операторного уравнения

$$A\,x = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{6.1}$$

состоит в следующем:
1) по $y \in Y$ построим $\overline{y} = T_Y\,y \in \overline{Y}$;
2) решим уравнение

$$\overline{A}\,\overline{x} = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{X}, \quad \overline{y} \in \overline{Y}, \tag{6.2}$$

и найдем $\overline{x} \in \overline{X}$;
3) по $\overline{x}$ восстановим $\widetilde{x} = S_X\,\overline{x} \in X$ — приближенное решение уравнения

(6.1).
Здесь подразумевается, что решение уравнения (6.2) существует. Тогда всегда можно найти приближенное решение $\widetilde{x}$ уравнения (6.1), даже если это уравнение решений не имеет.

Предположим, что решение точного уравнения существует, то есть $y \in R(A)$. Но из этого в общем случае не следует, что $\overline{y} \in R(\overline{A})$. Чтобы убедиться, что решение аппроксимирующего уравнения существует, нужно провести дополнительное исследование.

Заметим, что (такая ситуация уже рассматривалась) если пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — конечномерные одной и той же размерности, то решение уравнения (6.2) существует, если доказано, что уравнение может иметь только одно решение.

В общей теории линейных операторов условия существования решения аппроксимирующего уравнения известны, но они достаточно жесткие.

Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если 1) $R(A) = Y$, 2) имеет обратный A^{-1} и 3) обратный оператор ограничен. Легко проверить, что если $R(A) = Y$ и оператор A имеет ограниченный левый обратный, то оператор A непрерывно обратим.

Очевидно, что если $A : X \to Y$ и $B : Y \to Z$ — непрерывно обратимые операторы, то оператор $B\,A : X \to Z$ также непрерывно обратим и $(B\,A)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Рассмотрим линейное уравнение $A\,x = y$. Если оператор A непрерывно обратим, то 1) решение уравнения существует, 2) решение единственно и 3) решение непрерывно зависит от правой части. Последнее свойство сводится к следующему: если $A\,x_1 = y_2$ и $A\,x_2 = y_2$, то $||x_1 - x_2|| \leq ||A^{-1}||\,||y_1 - y_2||$.

Очевидно, что тождественный оператор I непрерывно обратим. Оказывается, что операторы, близкие к тождественному, тоже непрерывно обратимы. Будем считать, что рассматриваемые ниже операторы A, B, C, D и E действуют из X в Y и области их определения — все пространство X.

Лемма 6.1. *Если B — линейный оператор и $||B|| < 1$, то оператор $I - B$ непрерывно обратим. При этом*

$$||(I - B)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||B||}, \quad ||I - (I - B)^{-1}|| \leq \frac{||B||}{1 - ||B||}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд $I + B + B^2 + \ldots$. Очевидно, что $||B^n|| \le ||B||^n$. При $||B|| < 1$ последовательность частных сумм $S_n = I + B + \ldots + B^n$ сходится при $n \to +\infty$. Обозначим через S ее предел (сумму ряда). Легко видеть, что $(I - B)\, S_n = I - B^{n+1}$ и $S_n\, (I - B) = I - B^{n+1}$. При $n \to +\infty$ получим $(I - B)\, S = I$ и $S\, (I - B) = I$. Тогда оператор $I - B$ непрерывно обратим и $(I - B)^{-1} = S$.

Так как

$$||S_n|| \le 1 + ||B|| + \ldots + ||B||^n = \frac{1 - ||B||^{n+1}}{1 - ||B||},$$

$$||I - S_n|| \le ||B|| + ||B||^2 + \ldots + ||B||^n = ||B||\, \frac{1 - ||B||^n}{1 - ||B||},$$

то при $n \to +\infty$ получим неравенства (6.3). •

Следствие 6.1. *Если C — линейный оператор и $||I - C|| < 1$, то оператор C непрерывно обратим. При этом*

$$||C^{-1}|| \le \frac{1}{1 - ||I - C||}, \quad ||I - C^{-1}|| \le \frac{||I - C||}{1 - ||I - C||}.$$

Доказательство. Достаточно обозначить $C = I - B$. •

Следствие 6.2. *Пусть A и D — линейные ограниченные операторы. Если оператор A непрерывно обратим и $||(A - D)\, A^{-1}|| < 1$, то оператор D также непрерывно обратим и*

$$||D^{-1}|| \le \frac{||A^{-1}||}{1 - ||(A - D)\, A^{-1}||},$$

$$||D^{-1} - A^{-1}|| \le \frac{||A^{-1}||\; ||(A - D)\, A^{-1}||}{1 - ||(A - D)\, A^{-1}||}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Очевидно, $D = A - (A - D) = [I - (A - D)\, A^{-1}]\, A$. По лемме 6.1 оператор $I - (A - D)\, A^{-1} = D\, A^{-1}$ непрерывно обратим. Тогда и оператор $D = (D\, A^{-1})\, A$ непрерывно обратим, причем

$$||D^{-1}|| = ||A^{-1}(D\, A^{-1})^{-1}|| \le ||A^{-1}||\; ||(D\, A^{-1})^{-1}|| \le$$

$$\leq ||A^{-1}|| \, \frac{1}{1 - ||(A-D)\, A^{-1}||}.$$

Чтобы получить второе неравенство, запишем тождество $D^{-1} - A^{-1} = D^{-1}\,(I - D\,A^{-1}) = D^{-1}(A-D)\,A^{-1}$. $\bullet$

Следствие 6.3. *Пусть A и E — линейные ограниченные операторы. Если оператор A непрерывно обратим и $||A - E|| < ||A^{-1}||^{-1}$, то оператор E также непрерывно обратим и*

$$||E^{-1}|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A-E||\,||A^{-1}||},$$
$$||E^{-1} - A^{-1}|| \leq \frac{||A^{-1}||^2\,||A-E||}{1 - ||A-E||\,||A^{-1}||}. \tag{6.5}$$

Теорема 6.1. *Пусть $D(A) = X$, $D(\overline{A}) = \overline{X}$ и оператор A непрерывно обратим. Если*

$$||S_Y\,\overline{A}\,T_X - A|| < 1/||A^{-1}||, \tag{6.6}$$

то оператор $\overline{A}$ также непрерывно обратим.

Доказательство. По следствию 6.3 оператор $S_Y\,\overline{A}\,T_X$ непрерывно обратим.

Пусть $\overline{y} \in \overline{Y}$. Так как $R(T_Y) = \overline{Y}$, то $\exists y \in Y \mid T_Y\,y = \overline{y}$. Так как $R(S_Y\,\overline{A}\,T_X) = Y$, то $\exists x \in X \mid S_Y\,\overline{A}\,T_X = y$ или $\overline{A}\,\overline{x} = \overline{y}$, где $\overline{x} = T_X\,x$. Следовательно, $R(\overline{A}) = \overline{Y}$.

Пусть $\overline{x} \in \overline{X}$. Так как $R(T_X) = \overline{X}$, то $\exists x \in X \mid T_X\,x = \overline{x}$, причем $x \in D(A) = X$ и $||\overline{x}|| \leq ||T_X||\,||x||$. Тогда

$$||\overline{A}\,\overline{x}|| \geq \frac{1}{||S_Y||}\,||S_Y\,\overline{A}\,T_X\,x|| \geq \frac{1}{||S_Y||}\,(||Ax|| - ||(S_Y\,\overline{A}\,T_X - A)\,x||) \geq$$

$$\geq \frac{1}{||S_Y||}\Big(\frac{1}{||A^{-1}||} - ||S_Y\,\overline{A}\,T_X - A||\Big)\,||x||,$$

$$||x|| \geq \frac{1}{||T_X||}\,||T_X\,x|| = \frac{1}{||T_X||}\,||\overline{x}||.$$

Получось, что $||\overline{A}\,\overline{x}|| \geq \overline{m}\,||\overline{x}||$, где

$$m = \frac{1}{||S_Y||\,||T_X||}\,\Big(\frac{1}{||A^{-1}||} - ||S_Y\,\overline{A}\,T_X - A||\Big) > 0. \quad \bullet$$

Замечание 1. Из $R(S_Y \, \overline{A} \, T_X) = Y$ следует, что $R(S_Y) = Y$. Тогда имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами пространств Y и $\overline{Y}$ и элементы $\overline{Y}$ уже фактически не аппроксимируют элементы Y.

Замечание 2. Утверждение о том, что из разрешимости аппроксимирующего уравнения при любой правой части следует разрешимость точного уравнения при любой правой части, также не может быть получено, пока пространство $\overline{Y}$ эквивалентно не всему пространству Y, а только его части $\widetilde{Y}$.

Будем рассматривать уравнения (6.1) и (6.2) как *некорректные задачи*. *Квазирешением* уравнения (6.1), например, называют элемент $x \in X$, при котором достигает минимума *невязка* $||A\,x - y||$. Исследуем, как связаны друг с другом невязки уравнений (6.1) и (6.2).

Лемма 6.2. *Если* $x \in D(A)$, $\overline{x} = T_X\, x \in D(\overline{A})$, $\overline{y} = T_Y\, y$ *и оператор* S_Y *ограничен, то*

$$||A\,x - y|| \le ||(A - S_Y\, \overline{A}\, T_X)\, x|| + ||S_Y||\, ||\overline{A}\,\overline{x} - \overline{y}|| + ||(S_Y\, T_Y - I)\, y||. \quad (6.7)$$

Если $\overline{x} \in D(\overline{A})$, $x = S_X\, \overline{x} \in D(A)$, $\overline{y} = T_Y\, y$ *и оператор* T_X *ограничен, то*

$$||\overline{A}\,\overline{x} - \overline{y}|| \le ||(\overline{A} - T_Y\, A\, S_X)\, \overline{x}|| +$$
$$+ ||T_Y||\, ||A\,(S_X\, T_X - I)\, x|| + ||T_Y||\, ||A\,x - y||. \quad (6.8)$$

Доказательство этих неравенств сводится к простому преобразованию разностей $Ax - y$ и $\overline{A}\,\overline{x} - \overline{y}$. •

Предположим, что достаточно близки операторы $\overline{A}$ и A, а оператор $S_Y\, T_Y$ достаточно близок к тождественному оператору. Запишем неравенство (6.7) при $x = S_X \overline{x}$. Тогда невязка точного уравнения будет мала, если мала невязка аппроксимирующего уравнения. Следовательно, можно в качестве элемента $\overline{x}$, через который определяется приближенное решение $\widetilde{x} = S_X\, \overline{x}$ точного уравнения, взять квазирешение аппроксимирующего уравнения. При этом в правых частях неравенств, оценивающих погрешность решения, также будет присутствовать невязка аппроксимирующего уравнения. Неравенство (6.7) можно использовать и в том случае, когда точное уравнение является некорректно поставленной задачей.

7. Сходимость приближенной схемы

Пусть заданы последовательности аппроксимирующих пространств $\overline{X}^{(n)}$, $\overline{Y}^{(n)}$ и аппроксимирующих операторов $\overline{A}^{(n)} : \overline{X}^{(n)} \to \overline{Y}^{(n)}$. Такие последовательности возникают естественным образом, например, при аппроксимации функций векторами из n их значений в узлах или из n коэффициентов разложений по каким-либо базисным функциям. Будем называть *приближенной схемой* последовательность аппроксимирующих уравнений

$$\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)} = \overline{y}^{(n)}, \quad \overline{x}^{(n)} \in \overline{X}^{(n)},\ \overline{y}^{(n)} \in \overline{Y}^{(n)}. \tag{7.1}$$

Будем говорить, что последовательность элементов $\overline{x}^{(n)} \in \overline{X}^{(n)}$ *S-сходится* к элементу $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)}\| = 0$$

или $\overline{x}^{(n)}$ *T-сходится* к x, если

$$\lim_{n\to\infty} \|T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)}\| = 0.$$

В первом определении речь идет непосредственно о сходимости последовательности приближенных решений к точному решению. Аналогично вводятся понятия S- и T-сходимости последовательностей элементов $\overline{y}^{(n)} \in \overline{Y}^{(n)}$ к элементу $y \in Y$.

Операторы $B^{(n)}$ назовем *ограниченными в совокупности*, если

$$\exists C > 0 \ \mid\ \|B^{(n)}x\| \le C\,\|x\| \ \ \forall x \in D(B^{(n)}) \ \ \forall n.$$

Если имеют смысл нормы операторов $B^{(n)}$, то $\|B^{(n)}\| \le C \ \ \forall n$.

Лемма 7.1. *Если операторы $T_X^{(n)}$ ограничены в совокупности, то из S-сходимости последовательности $\overline{x}^{(n)}$ к x следует ее T-сходимость к x. Если операторы $S_X^{(n)}$ ограничены в совокупности и*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_X^{(n)}T_X^{(n)}x - x\| = 0, \tag{7.2}$$

то из T-сходимости $\overline{x}^{(n)}$ к x следует ее S-сходимость к x.

Доказательство. Утверждение леммы следует из 1-го и 3-го неравенств леммы 3.1:

$$||T_X^{(n)}\, x - \overline{x}^{(n)}|| \le ||T_X^{(n)}||\, ||x - S_x^{(n)}\overline{x}^{(n)}||,$$

$$||x - S_x^{(n)}\overline{x}^{(n)}|| \le ||S_X^{(n)}||\, ||T_X^{(n)}\, x - \overline{x}^{(n)}|| + ||S_X^{(n)}T_X^{(n)}x - x||.$$

Условие (7.2) выполняется, если последовательность операторов $S_X^{(n)}T_X^{(n)}$ сильно сходится к тождественному оператору, т. е. если условие (7.2) выполняется для всех $x \in X$. Аналогичное утверждение имеет место для последовательностей $\overline{y}^{(n)}$. •

Замечание. Если одновременно ограничены в совокупности операторы $T_X^{(n)}$ и $S_X^{(n)}$ и условие (7.2) выполнено, причем сходимость равномерная относительно $x \in X$, то можно говорить просто о сходимости последовательности $\overline{x}^{(n)}$ к x, подразумевая под этим как T-сходимость, так и S-сходимость. Ограниченность в совокупности операторов $T_X^{(n)}$ следует из условия согласованности норм ([Тр.ФА], с.291).

Будем говорить, что последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$ *сильно ST-сходится* к оператору A, если последовательность операторов $S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)}$ сильно сходится к оператору A, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)})x\| = 0 \quad \forall x \in D(A). \tag{7.3}$$

Аналогично, последовательность $\overline{A}^{(n)}$ *сильно TS-сходится* к оператору A, если

$$\lim_{n\to\infty} \|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\| = 0 \quad \forall \overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}). \tag{7.4}$$

Если стремление к пределу равномерное (скорость сходимости не зависит от x в (7.3) или от выбора последовательности $\overline{x}^{(n)}$ в (7.4)), то будем говорить о равномерной ST- или TS-сходимости.

Получим условия, при которых из сходимости последовательности правых частей аппроксимирующих уравнений к правой части точного уравнения следует сходимость последовательности решений аппроксимирующих уравнений к точному решению.

Теорема 7.1. *Пусть* $x \in D(A)$, $\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$ *и* $y = Ax$, $\overline{y}^{(n)} = \overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}$, *причем* $S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)} \in D(A) \quad \forall n$. *Если*

1) оператор A имеет ограниченный левый обратный;

2) хотя бы начиная с некоторого номера решения $\overline{x}^{(n)}$ аппроксимирующих уравнений единственны;

3) последовательность $\overline{y}^{(n)}$ T-сходится к y;

4) последовательность $\overline{A}^{(n)}$ сильно TS-сходится к A;

5) последовательность $S_Y^{(n)}T_Y^{(n)}$ равномерно сходится к I;

6) операторы $S_Y^{(n)}$ ограничены в совокупности,
то последовательность $\overline{x}^{(n)}$ S-сходится к x.

Доказательство. Запишем неравенство вида (3.3) (возможно, оно выполняется только начиная с некоторого n)

$$\|x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)}\| \leq \frac{1}{m_0}\Big\{\|S_Y^{(n)}\|\,\|T_Y^{(n)}y - \overline{y}^{(n)}\| +$$

$$+\|S_Y^{(n)}\|\,\|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\| + \|(S_Y^{(n)}T_Y^{(n)} - I)A(x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)})\|\Big\}$$

(здесь m_0 — постоянная из условия обратимости слева) и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Заметим, что если аппроксимирующие уравнения разрешимы, но не однозначно, то это неравенство может и не выполняться. •

Замечание. Если хотя бы при одном значении n условия теоремы 7.1 выполнены, то оператор A имеет ограниченный левый обратный.

Условие 2) теоремы 7.1 можно проверять с помощью следующего утверждения.

Следствие 7.1. (к теореме 4.1)
Пусть $S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)} \in D(A)$ $\forall\,\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$, $\forall n \geq n_0$, операторы $S_Y^{(n)}$ и $T_X^{(n)}$ ограничены в совокупности. Пусть оператор A имеет ограниченный левый обратный и

$$\|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\| \leq m_1^{(n)}\|\overline{x}^{(n)}\| \quad \forall\,\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}),$$

$$\|(S_Y^{(n)}T_Y^{(n)} - I)AS_X^{(n)}\overline{x}^{(n)}\| \leq m_2^{(n)}\|\overline{x}^{(n)}\| \quad \forall\,\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}).$$

Если

$$(m_1^{(n)}\,\|S_Y^{(n)}\| + m_2^{(n)})\,\|T_X^{(n)}\| < m_0 \quad \forall n \geq n_0,$$

то $\forall n \geq n_0$ операторы $\overline{A}^{(n)}$ имеют ограниченные левые обратные.

Легко видеть, что если

$$\lim_{n\to\infty} m_1^{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} m_2^{(n)} = 0,$$

то выполняется условие следствия 7.1. Именно этот случай имел место при исследовании приближенных методов решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Если число узлов аппроксимации $n \to +\infty$, то величина $\delta \to 0$. Тогда начиная с некоторого n_0 аппроксимирующие операторы обратимы слева и, следовательно, аппроксимирующие СЛАУ однозначно разрешимы.

Наконец заметим, условия 4) и 5) теоремы 7.1 можно ослабить. Достаточно предполагать, что только при рассматриваемых x и $\overline{x}^{(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)} A S_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|(S_Y^{(n)} T_Y^{(n)} - I) A (x - S_X^{(n)} \overline{x}^{(n)})\| = 0.$$

8. Метод усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_{k,j}\, x_j = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8.1}$$

здесь $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — последовательности чисел (бесконечные векторы), оператор A задается бесконечной матрицей $\{a_{k,j}\}$. Пусть операторы аппроксимации

$$T_X = T_Y = T \,:\, (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

и операторы интерполяции

$$S_X = S_Y = S \,:\, (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \mapsto (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, 0, \ldots).$$

Систему уравнений (8.1) аппроксимирует конечная СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, x_j = y_k, \quad k = 1\,.\,.\, n, \tag{8.2}$$

которая получена *методом усечения* (или, как говорили раньше, методом редукции).

8.1. Кубические нормы

Пусть $X = Y = m$ — пространство ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой

$$||x|| = \sup_j |x_j|$$

и $\overline{X} = \overline{Y} = R^n$ с кубической нормой

$$||\overline{x}|| = \max_{j=1..n} |\overline{x}_j|.$$

Легко видеть, что

$$||T|| = \sup_{||x||\le 1} ||T\,x|| = \sup_{||x||\le 1} \max_{j=1..n} |x_j| \le \sup_{||x||\le 1} ||x|| = 1 \quad \text{и} \quad ||S|| = 1.$$

Чтобы левые части уравнений БСЛАУ имели смысл, будем предполагать, что стоящие там ряды абсолютно сходятся. Так как

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{k,j}\, x_j| \le \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{k,j}| \cdot ||x||,$$

то можно считать, что сходятся ряды из абсолютных величин коэффициентов системы в каждой строке.

Исследуем неравенства из следствия 7.1. Напомним, что нужно найти такие величины m_1 и m_2, что выполняются неравенства

$$||(\overline{A} - T\,A\,S)\,\overline{x}|| \le m_1\,||\overline{x}||, \quad ||(S\,T - I)\,A\,S\,\overline{x}|| \le m_2\,||\overline{x}|| \qquad (8.3)$$

(верхний индекс (n) не пишем).

Так как $S\,\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, 0, 0, \ldots)$, то компоненты вектора $A\,S\,\overline{x}$

$$(A\,S\,\overline{x})_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,\overline{x}_j, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В векторе $T\,A\,S\,\overline{x}$ остается n таких сумм. Поэтому $T\,A\,S\,\overline{x} = \overline{A}\,\overline{x}$ и первое неравенство в (8.3) выполняется при $m_1 = m_1(n) = 0$.

Оператор $S\,T$ обнуляет элементы последовательности начиная с номера $n+1$. Следовательно,

$$(S\,T - I)\,A\,S\,\overline{x} = \Big(0, \ldots, 0, -\sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j}\overline{x}_j, \ldots\Big),$$

$$||(S\,T - I)\,A\,S\,\overline{x}|| = \sup_{k>n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,\overline{x}_j\Big|.$$

При этом

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\,\overline{x}_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| \cdot ||\overline{x}||.$$

Тогда

$$m_2 = m_2(n) = \sup_{k>n} \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|.$$

Следовательно, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|\Big),$$

то $m_2(n) \to 0$ при $n \to +\infty$.

8.2. Сферические нормы

Пусть $X = Y = l_2$ — пространство числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой

$$||x||^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j^2.$$

В аппроксимирующих пространствах $\overline{X} = \overline{Y} = R^n$ удобно использовать сферическую норму

$$||\overline{x}||^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j^2$$

(напомним, что в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны). Можно показать, что $||T|| = 1$ и $||S|| = 1$.

Рассмотрим неравенства (8.3). Первое из них выполняется при $m_1 = m_1(n) = 0$, так как и в этом случае $T\,A\,S\,\overline{x} = \overline{A}\,\overline{x}$ (равенство не зависит от выбора норм). Оценим норму из 2-го неравенства:

$$||(S\,T - I)\,A\,S\,\overline{x}||^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\overline{x}_j\Big)^2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\overline{x}_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}\overline{x}_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |\overline{x}_j|^2 = ||\overline{x}||^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|^2.$$

Поэтому

$$m_2^2 = m_2^2(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{k,j}|^2.$$

Следовательно, если

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{k,j}|^2 < +\infty,$$

то $m_2(n) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Таким образом, если решение БСЛАУ (8.1) существует и единственно, то у каждой СЛАУ (8.2) решение существует и единственно, а последовательность этих решений сходится к решению БСЛАУ.

9. Устойчивость приближенной схемы

Последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$ называется *устойчивой*, если

$$\exists m > 0 \mid \forall n \geq n_0 \quad \|\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}\| \geq m\|\overline{x}^{(n)}\| \quad \forall \overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}).$$

В этом случае говорят также, что устойчива приближенная схема. Из условия устойчивости следует, что начиная с некоторого номера n_0 операторы $\overline{A}^{(n)}$ имеют ограниченные обратные (см. неравенство (3.7)), причем постоянная m не зависит от n. Тогда при $n \geq n_0$ аппроксимирующие уравнения могут иметь только единственное решение.

Относительно просто подобрать условия, при которых последовательность $\overline{A}^{(n)}$ устойчива.

Лемма 9.1. *Если выполнены условия следствия 7.1 и, кроме того,*

$$\exists \varepsilon > 0 \mid (m_1^{(n)} \|S_Y^{(n)}\| + m_2^{(n)}) \|T_X^{(n)}\| \leq m - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

и последовательности $\|S_Y^{(n)}\|$, $\|T_X^{(n)}\|$ *ограничены снизу, то последовательность операторов* $\overline{A}^{(n)}$ *устойчива.*

Действительно, утверждение о существовании обратных операторов к операторам $\overline{A}^{(n)}$ основано (см. доказательство теоремы 4.1) на неравенствах

$$\|\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} \geq \overline{m}^{(n)}\|\overline{x}^{(n)}\| \quad \forall \overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}),$$

где

$$\overline{m}^{(n)} = \frac{m - (m_1^{(n)}\,\|S_Y^{(n)}\| + m_2^{(n)})\,\|T_X^{(n)}\|}{\|S_Y^{(n)}\| \cdot \|T_X^{(n)}\|}.$$

Существование $\overline{m} = \inf \overline{m}^{(n)} > 0$ обеспечивают дополнительные предположения. •

Если не установлено, что у оператора A есть ограниченный обратный, то можно использовать условия сходимости приближенной схемы, альтернативные условиям теоремы 7.1. Так обычно поступают при исследовании разностных схем, аппроксимирующих граничные задачи для дифференциальных уравнений.

Теорема 9.1. *Пусть $x \in D(A)$, $\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$ и $y = Ax$, $\overline{y}^{(n)} = \overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}$, причем $T_X^{(n)}x \in D(\overline{A}^{(n)})$ $\forall n$. Если*

1) последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$ устойчива;

2) последовательность $\overline{y}^{(n)}$ T-сходится к y;

3) последовательность $\overline{A}^{(n)}$ сильно ST-сходится к A;

4) операторы $T_Y^{(n)}$ ограничены в совокупности,

то последовательность $\overline{x}^{(n)}$ T-сходится к x.

Доказательство. Запишем неравенство (3.4) при произвольном n (может быть, начиная с некоторого номера)

$$\|T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)}\| \leq M^{(n)}\Big\{\|\overline{y}^{(n)} - T_Y^{(n)}y\| + \|T_Y^{(n)}\| \cdot \|(A - S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)})x\|\Big\}$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Из условия устойчивости следует, что

$$\sup_n M^{(n)} = \sup_n \sup \frac{\|T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)}\|}{\|\overline{A}^{(n)}(T_x^{(n)}x - \overline{x}^{(n)})\|} = m.$$

Вместо 3) достаточно предполагать, что при рассматриваемом $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)})x\| = 0. \quad •$$

Замечание. Утверждения теорем 3.2 и 4.2 можно было бы получить из утверждений теорем 3.1 и 4.1, если поменять местами точные и аппроксимирующие пространства, их элементы, точный и аппроксимирующий оператор, а также операторы аппроксимации и интерполяции. Некоторые отличия в оценках норм связаны с тем, что операторы аппроксимации и интерполяции не коммутируют. Теоремы 7.1 и 9.1 также образуют пару, но их утверждения получить друг из друга существенно сложнее.

Рассмотрим в качестве тривиального примера задачу Коши для простейшего дифференциального уравнения 1-го порядка

$$x'(t) = g(t), \quad t \in (a, b); \quad x(a) = d.$$

Пусть $X = C([a, b])$, $\|x(\cdot)\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ и на множестве функций $D(A)$, имеющих непрерывную производную, точный оператор

$$A : x(\cdot) \mapsto (x'(\cdot), x(a)).$$

При этом $Y = C([a, b]) \times R^1$. Если $y = (z(\cdot), c)$ — пара, состоящая из функции и числа, то $\|y\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |z(t)| + |c|$.

Выберем на $[a, b]$ равноотстоящие узлы $t_j = a + jh$, $j = 0\,.\,.\,n$, $h = (b - a)/n$. Пусть $\overline{X} = \overline{Y} = R^{n+1}$, $T_X : x(\cdot) \mapsto (x(t_0), \ldots, x(t_n))$ и $T_Y : (z(\cdot), c) \mapsto \overline{y} = (c, z(t_0), \ldots, z(t_{n-1}))$. При этом операторы интерполяции такие, что

$$\widetilde{x}(t) = S_X\overline{x} = \overline{x}_j \frac{t_{j+1} - t}{h} + \overline{x}_{j+1} \frac{t - t_j}{h}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \ \ j = 0\,.\,.\,n - 1,$$

а элементу $\overline{y} = (\overline{c}, \overline{z}_0, \ldots, \overline{z}_{n-1})$ ставится в соответствие элемент $\widetilde{y} = S_Y\overline{y} = (\widetilde{z}(\cdot), \widetilde{c})$, где $\widetilde{c} = \overline{c}$ и непрерывная функция $\widetilde{z}(\cdot)$ на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0..n - 2$ восстанавливается точно так же, как $\widetilde{x}(\cdot)$, методом кусочно-линейной интерполяции, но $\widetilde{z}(t) = \overline{z}_{n-1}$ на $[t_{n-1}, t_n]$.

Если использовать *метод Эйлера* приближенного решения задачи Коши, то аппроксимирующая СЛАУ имеет вид

$$\overline{x}_0 = d, \quad \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_0}{h} = g(t_0), \ \ldots, \ \frac{\overline{x}_n - \overline{x}_{n-1}}{h} = g(t_{n-1}).$$

Проверим, выполняются ли условия теоремы 9.1.

Невырожденная матрица коэффициентов СЛАУ имеет две диагонали, на главной стоят числа 1 и $1/h$, а ниже $-1/h$. Легко видеть, что

обратная матрица — треугольная, первый ее столбец состоит из единиц, а остальные ненулевые элементы левого нижнего треугольника равны h. Тогда $\|\overline{A}^{-1}\| = 1 + nh = 1 + b - a$ и $\|\overline{x}\| = \|\overline{A}^{-1}\overline{A}\overline{x}\| \le (1 + b - a)\|\overline{A}\overline{x}\|$, то есть
$$||\overline{A}\overline{x}|| \ge \frac{1}{1+b-a}\,||x||.$$
Это значит, что последовательность аппроксимирующих операторов устойчива (условие 1)).

Проверим условие 3). Легко видеть, что
$$\|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\| = ||x'(\cdot) - \tilde{z}(\cdot)|| + |x(a) - x(t_0)|,$$
где $\tilde{z}(\cdot)$ — функция из пары $S_Y\overline{A}T_Xx$, причем
$$||x'(\cdot) - \tilde{z}(\cdot)|| = \max_{j=0..n-1}\max_{t\in[t_j,t_{j+1}]}|x'(t) - \tilde{z}(t)|.$$

Очевидно, что $|x(a) - x(t_0)| = 0$. Так как
$$\overline{A}T_Xx = \Big(x(t_0), \frac{x(t_1) - x(t_0)}{h}, \dots, \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h}\Big),$$
то при $j = n - 1$
$$\left|x'(t) - \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h}\right| = |x'(t) - x'(\xi)| \le \omega(x'(\cdot), h)$$
(здесь $\xi \in (t_{n-1}, t_n)$) и при $j = 0\,..\,n-2$
$$\left|x'(t) - \frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{h}\,\frac{t_{j+1} - t}{h} - \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{h}\,\frac{t - t_j}{h}\right| \le$$
$$\le \frac{t_{j+1} - t}{h}\;|x'(t) - x'(\xi)|\; + \frac{t - t_j}{h}\;|x'(t) - x'(\eta)| \le \omega(x'(\cdot), h)$$
(здесь $\xi \in (t_{j-1}, t_j)$ и $\eta \in (t_j, t_{j+1})$). Тогда
$$\|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\|_Y \le \omega(x'(\cdot), h) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Наконец, условия 2) и 4) выполнены, так как $\overline{y} = T_Yy$ и $||T_y|| = 1$. Мы доказали, что последовательность решений аппроксимирующих уравнений сходится к точному решению.

10. Нелинейная приближенная схема

Распространим на нелинейный случай утверждение теоремы 9.1.

Пусть X, Y — нормированные пространства, $A : X \to Y$ — нелинейный оператор. Пусть $\overline{X}^{(n)}$, $\overline{Y}^{(n)}$ — аппроксимирующие пространства, $T_X^{(n)}$, $S_X^{(n)}$, $T_Y^{(n)}$, $S_Y^{(n)}$ — линейные операторы аппроксимации и интерполяции. Пусть $\overline{A}^{(n)} : \overline{X}^{(n)} \to \overline{Y}^{(n)}$ — аппроксимирующие (нелинейные) операторы. В дальнейшем верхний индекс (n) указывать не будем.

Дадим несколько определений, аналогичных определениям линейной теории.

Последовательность операторов $\overline{A}$ *сильно ST-сходится* к оператору A, если

$$||A(x) - S_Y\,\overline{A}(T_X\,x)|| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \forall x \in D(A).$$

Аналогично, последовательность операторов $\overline{A}$ *сильно TS-сходится* к оператору A, если

$$||T_Y\,A(S_X\,\overline{x}) - \overline{A}(\overline{x})|| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}).$$

Эти определения фактически совпадают с соответствующими определениями из п. 7.

Будем говорить, что выполнено *условие аппроксимации*, если

$$||T_Y A(x) - \overline{A}(T_X x)|| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \forall x \in D(A).$$

При этом, если операторы T_Y ограничены в совокупности, то из сильной ST-сходимости следует условие аппроксимации, так как

$$||T_Y A(x) - \overline{A}(T_X x)|| = ||T_Y A(x) - T_Y S_Y \overline{A}(T_X x)|| \le$$

$$\le ||T_Y||\,||A(x) - S_Y\,\overline{A}(T_X\,x)||.$$

С другой стороны, из условия аппроксимации следует сильная TS-сходимость (но не наоборот, так как не для всех $x \in X$ найдется такой элемент $\overline{x} \in \overline{X}$, что $x = S_X \overline{x}$).

Последовательность операторов $\overline{A}$ *устойчива*, если $\exists$ непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $\omega(\cdot)$, строго возрастающая, $\omega(0) = 0$, $\omega(+\infty) = +\infty$ и такая, что

$$||\overline{A}(\overline{x}_1) - \overline{A}(\overline{x}_2)|| \ge \omega(||\overline{x}_1 - \overline{x}_2||) \quad \forall n \ge n_0,\ \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in D(\overline{A}).$$

В этом определении существенно то, что найдется обратная к $\omega(\cdot)$ непрерывная функция $\alpha(\cdot)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(+\infty) = +\infty$ и такая, что

$$||\overline{x}_1 - \overline{x}_2|| \le \alpha(||\overline{A}(\overline{x}_1) - \overline{A}(\overline{x}_2)||) \quad \forall n \ge n_0,\ \forall \overline{x}_1,\ \overline{x}_2 \in D(\overline{A})$$

(*условие устойчивости*).

Нормы в пространствах $\overline{X}$ невырожденны, если из $||T_X\, x|| \to 0$ при $n \to +\infty$ следует, что $x = 0$ (*условие невырожденности норм*).

Пусть точное и аппроксимирующие уравнения имеют вид

$$A(x) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{A}(\overline{x}) = 0.$$

Лемма 10.1. *Если выполнено условие устойчивости, то аппроксимирующие уравнения могут иметь только одно решение (хотя бы начиная с некоторого номера).*

Доказательство. Предположим, что решений два: $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. Тогда из условия устойчивости следует, что

$$||\overline{x}_1 - \overline{x}_2|| \le \alpha(||\overline{A}(\overline{x}_1) - \overline{A}(\overline{x}_2)||) = \alpha(0) = 0. \quad \bullet$$

Лемма 10.2. *Если выполнены условие аппроксимации, условие устойчивости и условие невырожденности норм, то точное уравнение может иметь только одно решение.*

Доказательство. Предположим, что решений два: x_1 и x_2. Тогда из условия устойчивости следует, что

$$||T_X(x_1 - x_2)|| = ||T_X x_1 - T_X x_2|| \le \alpha(||\overline{A}(T_X x_1) - \overline{A}(T_X x_2)||).$$

При этом

$$||\overline{A}(T_X x_1) - \overline{A}(T_X x_2)|| \le= ||\overline{A}(T_X x_1) - T_Y A(x_1)|| + ||T_Y A(x_2) - \overline{A}(T_X x_2)||.$$

Перейдем к пределу при $n \to +\infty$ и получим $x_1 - x_2 = 0$. $\bullet$

Теорема 10.1. *Пусть точное уравнение и аппроксимирующие уравнения имеют решения (хотя бы начиная с некоторого номера). Если*
1) приближенная схема устойчива;
2) выполняется первое условие аппроксимации и

3) нормы в $\overline{X}$ невырожденны,
то последовательность решений аппроксимирующих уравнений T-сходится к точному решению.

Доказательство. Пусть x — решение точного уравнения, а $\overline{x}$ — решение аппроксимирующего уравнения. Из лемм 10.1 и 10.2 следует, что эти решения единственны. Рассмотрим T-погрешность решения. Из условия аппроксимации следует, что

$$||T_X x - \overline{x}|| \le \alpha(||\overline{A}(T_X x) - \overline{A}(\overline{x})||).$$

Но

$$||\overline{A}(T_X x) - \overline{A}(\overline{x})|| = ||\overline{A}(T_X x)|| = ||\overline{A}(T_X x) - T_Y A(x)||.$$

Осталось перейти к пределу при $n \to +\infty$. •

Рассмотрим в качестве примера задачу Коши для ОДУ 1-го порядка

$$x' = f(t,x), \quad t \in (a,b); \quad x(a) = d.$$

Предположим, что функции f и $\partial f/\partial x$ непрерывны и $|\partial f/\partial x| \le c$. Тогда у задачи Коши существует единственное решение.

Запишем точное операторное уравнение. Пусть

$$A\,:\,x(\cdot) \to (x'(\cdot) - f(\cdot, x(\cdot)), x(a) - d),$$

пространства X и Y — такие же, как в примере из п. 9.

Построим аппроксимирующий оператор для метода Эйлера. При равноотстоящих узлах $t_j = a + jh,\ j = 0\ .\ .\ n$, метод Эйлера сводится к решению системы уравнений

$$\overline{x}_0 = d,\ \ \overline{x}_k = \overline{x}_{k-1} + h\,f(t_{k-1}, \overline{x}_{k-1}),\ k = 1\ .\ .\ n,$$

очевидно, что ее решение существует и единственно. Тогда

$$\overline{A}\,:\,\overline{x} \to \Big(\overline{x}_0 - d, \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_0}{h} - f(t_0, \overline{x}_0),\ \ldots,\ \frac{\overline{x}_n - \overline{x}_{n-1}}{h} - f(t_{n-1}, \overline{x}_{n-1})\Big),$$

при этом $\overline{X} = \overline{Y} = R^{n+1}$.

Проверим, выполняются ли условия теоремы 10.1. Легко видеть, что

$$||T_Y A(x) - \overline{A}(T_X x)|| = \max\Big(|x(a) - x(t_0)|,\ \Big|x'(t_0) - \frac{x(t_1) - x(t_0)}{h}\Big|,\ \ldots$$

$$\ldots, \left|x'(t_{n-1}) - \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h}\right|\Big) \le \omega(x'(\cdot); h),$$

так что условие аппроксимации выполнено.

Убедимся в том, что и условие устойчивости выполняется. Обозначим $u = \overline{x}^1 - \overline{x}^2$ и $v = \overline{A}(\overline{x}^1) - \overline{A}(\overline{x}^2)$. Докажем, что $||u|| \le C||v||$, где C — некоторая постоянная.

Из системы аппроксимирующих уравнений следует, что

$$v_0 = u_0; \quad v_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1}, \xi_k)\, u_{k-1}, \quad k = 1 \,.\,.\, n$$

(здесь число ξ_k расположено между $\overline{x}^1_{k-1}$ и $\overline{x}^2_{k-1}$). Тогда при $k = 1 \,.\,.\, n$

$$u_k = \Big(1 + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1}, \xi_k)\Big)\, u_{k-1} + hv_k$$

и

$$|u_k| \le (1 + hc)\,|u_{k-1}| + h|v_k|.$$

Так как $|u_0| = |v_0|$ и $|v_k| \le ||v||\ \forall k$, то

$$|u_1| \le (1 + hc)\ |v_0| + h|v_1| \le (1 + hc + h)\ ||v||,$$

$$|u_2| \le (1 + hc)(1 + hc + h)\ ||v|| + h||v|| = [(1 + hc)^2 + h(1 + hc) + h]\ ||v||,$$
$$|u_3| \le [(1 + hc)^3 + h(1 + hc)^2 + h(1 + hc) + h]\ ||v||$$

и так далее. Поэтому

$$|u_n| \le C_n||v||,$$

$$C_n = (1 + hc)^n + h(1 + hc)^{n-1} + \ldots + h = (1 + hc)^n + h\,\frac{(1 + hc)^n - 1}{1 + hc - 1} =$$

$$= \frac{(1 + hc)^n(1 + c) - 1}{c},$$

при этом

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + hc)^n = e^{(b-a)c}.$$

Поэтому можно считать, что

$$C = \max\Big(1, \frac{e^{(b-a)c}(1 + c) - 1}{c}\Big).$$

11. Двойственные пространства и двойственные операторы

Пусть X и X$'$ — линейные пространства над полем скаляров K. Если задан билинейный функционал φ : X $\times$ X$'$ $\to$ K, то будем говорить, что φ приводит пространства X и X$'$ в двойственность и будем называть X и X$'$ *двойственными пространствами.* Если не нужно указывать, какие именно билинейные функционалы устанавливают отношение двойственности между пространствами, то вместо $\varphi(x, x')$ будем использовать выражение $< x, x' >$.

В дальнейшем будем предполагать, что множества определения всех рассматриваемых операторов и функционалов совпадают с соответствующими линейными пространствами. Ограничимся случаем, когда K — поле вещественных чисел.

Оба пространства в двойственной паре равноправны. Пространство может быть двойственно само себе. Например, любое вещественное пространство со скалярным произведением двойственно само себе относительно билинейной формы $< x, x' >= (x, x')$. Поэтому конструкцию $< x, x' >$ будем называть *бискалярным произведением* элементов x и x'.

Двойственность называется *тотальной*, если из $< x, x' >= 0 \quad \forall\, x' \in$ X$'$ следует, что $x = 0$, и из $< x, x' >= 0 \quad \forall\, x \in$ X следует, что $x' = 0$. Будем предполагать в дальнейшем, что условие тотальности всегда выполняется.

Если двойственность тотальная и $< x_1, x' >=< x_2, x' > \ \forall\, x' \in$ X$'$, то $x_1 = x_2$. Имеется также равносильное определение: если $\forall\, x \neq 0 \ \exists\, x' \mid < x, x' >\neq 0$ и $\forall x' \neq 0 \ \exists\, x \mid < x, x' >\neq 0$, то двойственность тотальная.

Условие тотальности как бы выравнивает двойственные пространства по количеству содержащихся в них элементов. Можно, например, установить двойственность между пространством векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ и множеством скаляров x' с помощью билинейного функционала $< x, x' >= x_1 x'$. Но такая двойственность, очевидно, не тотальная.

Если установлена двойственность между линейными пространствами X и X$'$, то каждому элементу $x' \in$ X$'$ соответствует определенный на X линейный функционал $x \mapsto < x, x' >$. Также, каждому элементу $x \in$ X соответствует определенный на X$'$ линейный функционал $x' \mapsto < x, x' >$.

Следовательно, в каждом из двойственных пространств фактически задана топология (системой линейных функционалов). Но топологические свойства двойственных пространств пока рассматриваться не будут.

Пусть X, X' и Y, Y' — двойственные пары линейных пространств, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$ — линейный оператор. Оператор $A' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$ называется *двойственным* к A, если

$$< x, A'y >=< y, Ax > \quad \forall\, x \in \mathrm{X}, \;\; \forall\, y \in \mathrm{Y}.$$

В дальнейшем станет ясно, почему в некоторых случаях удобно рассматривать операторы, действующие из одного линейного пространства в двойственное к другому. Для линейных операторов $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ и $A' : \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ условие двойственности имело бы вид

$$< x, A'y' >=< Ax, y' > \quad \forall\, x \in \mathrm{X}, \;\; \forall\, y' \in \mathrm{Y}'.$$

В общем случае оператор, двойственный к линейному, не всегда существует. Действительно, если $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$, то оператор A' определяется следующим образом: элементу $y \in \mathrm{Y}$ ставится в соответствие такой элемент $x' \in \mathrm{X}'$, что $< x, x' >=< y, Ax > \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$. Нет оснований утверждать, что этот элемент x' всегда может быть найден.

Достаточным условием существования двойственного оператора является следующее предположение (дополнительное свойство двойственной пары X, X'): для любого линейного функционала f на X найдется такой элемент $x' \in \mathrm{X}'$, что $< x, x' >= f(x) \;\; \forall\, x \in \mathrm{X}$.

Для пары (H, H), где H — гильбертово пространство, а двойственность задается с помощью скалярного произведения, это условие выполняется (теорема Ф. Рисса об общем виде линейных функционалов).

Лемма 11.1. *Если двойственные операторы существуют, то*
1) $(A + B)' = A' + B'$;
2) $(kA)' = kA'$;
3) $(BA)' = A'B'$;
4) $(A')' = A$;
5) $I' = I$ $\;$ (I — *тождественный оператор*).

Доказательство. Пусть A и B — линейные операторы из X в Y'. Пусть существуют двойственные операторы A' и B', при этом выполняются тождества $< x, A'y >=< y, Ax >$ и $< x, B'y >=< y, Bx > \ \forall x \in \mathrm{X}, \forall y \in \mathrm{Y}$. Отсюда следует, что $< x, (A'+B')y >=< y, (A+B)x >$. Тогда $A'+B'$ — оператор, двойственный к линейному оператору $A+B$.

Аналогично доказываются остальные равенства. Например, пусть $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}'$, $A' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$ и $B : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Z}$, $B' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Y}$ — две пары двойственных операторов, при этом $< x, A'y >=< y, Ax >$ и $< By', z' >=< B'z', y' >$. Тогда $< x, A'B'z' >=< B'z', Ax >=< BAx, z' >$, то есть оператор $A'B' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{X}'$ является двойственным к оператору $BA : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$.

В последнем равенстве подразумевается, что $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{X}'$ и $I : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. $\bullet$

Лемма 11.2. *Пусть* $\mathrm{X} = \mathrm{X}' = \mathrm{Y} = \mathrm{Y}' = \mathrm{C}([a, b])$, *и отношение двойственности задано с помощью интегрального билинейного функционала*

$$< x, x' >= \varphi(x, x') = \int_a^b x(t)x'(t)\, dt.$$

Если $k(\tau, t)$ *— непрерывная функция, то*

$$A : x(t) \mapsto x(t) + \int_a^b x(\tau)\, k(\tau, t)\, d\tau \quad \text{и} \quad A' : y(t) \mapsto y(t) + \int_a^b y(\tau)\, k(t, \tau)\, d\tau$$

— двойственные операторы.

Действительно,

$$< x, A'y >= \int_a^b x(t) \left(y(t) + \int_a^b y(\tau)\, k(t, \tau)\, d\tau \right) dt =$$

$$= \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt + \int_a^b y(\tau) \Bigl(\int_a^b x(t)\, k(t, \tau)\, dt \Bigr)\, d\tau$$

и, если переставить местами переменные t и τ во втором слагаемом,

$$< x, A'y >= \int_a^b y(t) \left(x(t) + \int_a^b x(\tau)\, k(\tau, t)\, d\tau \right) dt =< y, Ax > . \quad \bullet$$

В более общем случае двойственной парой относительно билинейного интегрального функционала будет также любая пара пространств функций, произведение элементов которых интегрируемо.

12. Метод Галеркина

В п. 5 был описан метод Галеркина приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Распространим этот метод на более общий случай. Отметим, что различные варианты методов Ритца, Бубнова, Галеркина, Петрова, которые используются при приближенном решении широкого круга задач, в современной литературе принято рассматривать как один общий метод — метод Галеркина.

Пусть X, Y — линейные пространства, $A \; : \; \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ — линейный оператор. Запишем линейное операторное уравнение

$$A\,x = y, \quad x \in \mathrm{X}, \quad y \in \mathrm{Y}. \tag{12.1}$$

Метод Галеркина состоит в следующем. Пусть X' и Y' — линейные пространства, двойственные к пространствам X и Y соответственно. Выберем в $\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{X}$ систему линейно независимых элементов x_j, $j = 1, 2, \ldots$ (*координатную систему*) и в Y' выберем систему линейно независимых элементов y'_k, $k = 1, 2, \ldots$ (*проекционную систему*). Будем искать приближенное решение уравнения (12.1) в виде

$$\widetilde{x} = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j\, x_j,$$

где n — некоторое натуральное число. Искомые коэффициенты $\overline{x}_j$ нужно подобрать так, чтобы выполнялись равенства

$$< A\,\widetilde{x} - y,\, y'_k >= 0, \quad k = 1\,..\,n$$

(т. е. невязка уравнения (12.1) должна быть биортогональна элементам проекционной системы). Таким образом, уравнению (12.1) ставится в соответствие аппроксимирующая его СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{n} < Ax_j,\, y'_k > \,\overline{x}_j =< y,\, y'_k >, \quad k = 1\,..\,n. \tag{12.2}$$

В общем случае не ясно, разрешима или нет система линейных уравнений (12.2). Также нет оснований утверждать, что последовательность приближенных решений $\widetilde{x} = \widetilde{x}^{(n)}$ сходится (в каком-либо смысле) при $n \to \infty$ к точному решению. Для обоснования метода Галеркина нужно провести дополнительные построения.

Пусть $x'_j,\ j=1,2,\dots$ — система элементов пространства X', биортонормированная с координатной системой элементов x_j, а $y_k,\ k=1,2,\dots$ — система элементов пространства Y, биортогональная с проекционной системой элементов y'_k. При этом выполняются равенства $<x_j, x'_k>=\delta_{kj}$ и $<y_j,\ y'_k>=\delta_{kj},\ k,j=1,2,\dots$. Числа $<x,\ x'_j>$ будем называть *коэффициентами Галеркина* элемента x относительно системы элементов x'_j.

Пусть оператор аппроксимации T_X элементу x ставит в соответствие n первых коэффициентов Галеркина, а оператор интерполяции S_X по вектору $\overline{x}=(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$ восстанавливает элемент $\widetilde{x}=\sum\limits_{j=1}^{n}\overline{x}_j\,x_j$. Аналогично,

$$T_Y : y\mapsto(<y, y'_1>,\dots,<y, y'_n>),\quad S_Y : \overline{y}=(\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_n)\mapsto\widetilde{y}=\sum_{k=1}^{n}\overline{y}_k\,y_k.$$

Теперь ясно, что аппроксимирующая СЛАУ (12.2) представляет собой уравнение привычного вида $T_Y\,A\,S_X\overline{x}=\overline{y}$, где $\overline{y}=T_Y y$. Если предположить дополнительно, что в рассматриваемых пространствах определены нормы, то условия сходимости метода Галеркина нетрудно получить из условий теоремы 9.1.

Часто условия сходимости метода Галеркина формулируют на языке проекторов (см., например, [Тр.ФА], §30).

Легко видеть, что оператор

$$P_X=S_X\,T_X\ :\ x\mapsto\sum_{j=1}^{n}<x,\ x'_j>\ x_j$$

является *проектором* в X, т. е. $P_X^2=P_X$, а оператор $P_Y=S_Y\,T_Y$ является проектором в Y.

По определению проектора P_X

$$A\,P_X\,x=A\sum_{j=1}^{n}<x,\ x'_j>\ x_j=\sum_{j=1}^{n}<x,\ x'_j>\ A\,x_j.$$

Если приравнять коэффициенты Галеркина относительно системы $\{y'_k\}$ левой и правой частей этого равенства, то получим СЛАУ

$$<A\,P_X\,x,\ y'_k>=<y,\ y'_k>,\quad k=1\,..\,n$$

или, что одно и то же,

$$\sum_{j=1}^{n} < A\,x_j,\, y'_k >< x,\, x'_j >=< y,\, y'_k >, \quad k = 1\,.\,.\,n. \tag{11.3}$$

Ясно, что числа a_j в приближенном решении уравнения (11.1) представляют собой коэффициенты Галеркина его решения x относительно системы элементов x'_j.

Система уравнений (11.3) и определяет аппроксимирующее операторное уравнение. Эту систему можно компактно записать в виде

$$P_Y\,A\,P_X\,x = P_Y\,y, \tag{11.4}$$

при этом уравнения (11.3) — это уравнение (11.4), записанное в координатах. Уравнение (11.4) будем называть приближенным уравнением. Его решения $\widetilde{x} = P_X\,x \in \mathrm{X}$.

Метод Галеркина для приближенного решения нелинейного операторного уравнения $A(x) = 0$ приводит к приближенному уравнению $P_Y A(P_X x) = 0$, а точнее к системе нелинейных уравнений вида

$$< A(P_X x), y'_k >= 0, \quad k = 1\,.\,.\,n$$

относительно коэффициентов Галеркина искомого элемента.

Покажем, что аппроксимирующая СЛАУ (11.3) может быть получена в результате несколько иных рассуждений. Элементу x поставим в соответствие его ряд Галеркина по биортогональной системе $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} < x,\, x'_j > x_j$. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{+\infty} < x,\, x'_j > \; A\,x_j.$$

Если приравняем коэффициенты Галеркина элементов $A\,x$ и y по системе элементов y'_k, то получим БСЛАУ относительно коэффициентов Галеркина элемента x

$$\sum_{j=1}^{+\infty} < A\,x_j,\, y'_k >< x,\, x'_j >=< y,\, y'_k >, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11.5}$$

Поэтому метод Галеркина можно рассматривать как метод усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (11.5).

Если X и Y — гильбертовы пространства, то двойственные (сопряженные) пространства X$'$ и Y$'$ в силу теоремы Ф. Рисса можно отождествить с X и Y, а бискалярные произведения заменить на скалярные произведения: $< x,\, x'_j >= (x,\, x'_j)$ и $< y,\, y'_k >= (y,\, y'_k)$. Тогда БСЛАУ (11.5) примет вид

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(A\,x_j,\, y'_k)\,(x,\, x'_j) = (y,\, y'_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11.6}$$

Если Y = X, то одну и ту же систему элементов можно использовать и как координатную, и как проекционную. Кроме того, если эта система ортогональная, то коэффициенты и ряды Галеркина являются также коэффициентами и рядами Фурье.

Рассмотрим ситуацию, когда метод Галеркина можно рассматривать как вариант *метода полуобращения* — одного из распространенных приемов решения операторных уравнений.

Предположим, что $A = A_1 + A_2$, причем A_1 — положительно определенный оператор с бесконечным дискретным спектром, действующий в гильбертовом пространстве X. Пусть $A_1 x_j = \lambda_j x_j,\ \ j = 1, 2, \ldots$, при этом x_j — полная ортонормированная система элементов в X. Обозначим $a_j = (x, x_j),\ j = 1, 2, \ldots$ Считая, что $y_k = x_k$ $k = 1, 2, \ldots$, получим из (11.6)

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(\lambda_j x_j + A_2 x_j, x_k)\, a_j = (y, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

или

$$\lambda_k a_k + \sum_{j=1}^{+\infty}(A_2 x_j, x_k)\, a_j = (y, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11.7}$$

Но если (λ_j, x_j) – собственные пары оператора A_1, то легко построить оператор, обратный к A_1 (см., например, [Мих.УЧП, с. 101]):

$$A_1^{-1} :\ y\ \mapsto\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}(y, x_k)\, x_k.$$

Действительно,

$$A_1^{-1} A_1 x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}\Big(\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j, x_k\Big)\, x_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}\, \lambda_k (x, x_k) x_k = x.$$

Легко видеть, что если к уравнению $A_1x + A_2x = y$ применить оператор A_1^{-1}, то получим уравнение

$$x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}(A_2x, x_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}(y, x_k)x_k$$

и БСЛАУ для коэффициентов Фурье элемента x

$$a_k + \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{+\infty}(A_2x_j, x_k)a_k = \frac{1}{\lambda_k}(y, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Уравнения этой БСЛАУ отличаются от уравнений БСЛАУ (11.7) только множителем.

Таким образом, метод Галеркина с использованием ортогональной системы собственных элементов части оператора фактически представляет собой метод полуобращения.

13. Аппроксимация двойственности

Пусть X, X' и Y, Y' — двойственные пространства, $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ и $A' : \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ — двойственные операторы. Пусть пространства $\overline{\mathrm{X}}$ и $\overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимируют пространства X и Y, а T_X, S_X, T_Y, S_Y — операторы аппроксимации и интерполяции. Чтобы аппроксимировать пространства X', Y' и оператор A', нужно определить операторы T'_X, S'_X, T'_Y, S'_Y и $\overline{A'}$ (см. рис. 2).

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{X}' & & \xleftarrow{A'} & & \mathrm{Y}' & \\ T_{X'} & \downarrow\uparrow & S_{X'} & & T_{Y'} & \downarrow\uparrow & S_{Y'} \\ & \overline{\mathrm{X}'} & & \xleftarrow{\overline{A'}} & & \overline{\mathrm{Y}'} & \end{array}$$

Рис. 2.

Рассмотрим наиболее естественный способ аппроксимации двойственных пространств и операторов. Пусть $\overline{\mathrm{X}}'$ и $\overline{\mathrm{Y}}'$ — пространства, двойственные к $\overline{\mathrm{X}}$ и $\overline{\mathrm{Y}}$.

Лемма 13.1. *Если операторы T_X и S_X имеют двойственные, то пространство $\overline{X}'$ аппроксимирует пространство X'.*

Доказательство. По определению операторов аппроксимации и интерполяции $T_X S_X = I$ (в пространстве $\overline{\mathrm{X}}$). Из свойств 3) и 5) двойственных операторов (лемма 11.1) следует, что для операторов $T'_X \ : \ \overline{\mathrm{X}}' \to \mathrm{X}'$ и $S'_X \ : \ \mathrm{X}' \to \overline{\mathrm{X}}'$ выполняется тождество $S'_X T'_X = I$ (в пространстве $\overline{\mathrm{X}}'$). Поэтому $\overline{\mathrm{X}}'$ — аппроксимация X', при этом операторы аппроксимации и интерполяции таковы, что $T_{X'} = S'_X, \ \ S_{X'} = T'_X$. •

Заметим, что равенство $\overline{\mathrm{X}'} = \overline{\mathrm{X}}'$ не означает, что операции аппроксимации и двойственности коммутируют. Это равенство показывает, что пространство $\overline{\mathrm{X}}'$ может быть выбрано в качестве аппроксимации пространства X' (из всех возможных аппроксимаций).

Лемму 13.1 можно было бы сформулировать в другой форме: *пространство, двойственное к аппроксимирующему пространству, аппроксимирует пространство, двойственное к точному.*

По аналогии можно выбирать $\overline{\mathrm{Y}'} = \overline{\mathrm{Y}}'$.

Лемма 13.2. *Если оператор $\overline{A}'$ существует, то он аппроксимирует оператор A'.*

Доказательство. Пусть оператор $\overline{A} : \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{Y}}$ аппроксимирует оператор $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Как следует непосредственно из определения двойственного оператора, оператор $\overline{A}'$ действует из $\overline{\mathrm{Y}}'$ в $\overline{\mathrm{X}}'$.

Равенство $\overline{A'} = \overline{A}'$ также следует понимать в том смысле, что $\overline{A}'$ – один из операторов, аппроксимирующих A'. Можно выбрать и другой аппроксимирующий оператор. •

Если $\overline{\mathrm{X}'} = \overline{\mathrm{X}}', \ \ \overline{\mathrm{Y}'} = \overline{\mathrm{Y}}'$ и $\overline{A'} = \overline{A}'$, то диаграмма на рис. 2 уточняется следующим образом (см. рис. 3).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathrm{X}' & & \xleftarrow{A'} & & \mathrm{Y}' & \\
S'_X & \downarrow\uparrow & T'_X & & S'_Y & \downarrow\uparrow & T'_Y \\
 & \overline{\mathrm{X}}' & & \xleftarrow{\overline{A}'} & & \overline{\mathrm{Y}}' &
\end{array}$$

Рис. 3.

Лемма 13.3. *Если* $\overline{A'} = \overline{A}'$, *то* $(\overline{A}^0)' = \overline{(A')}^0$ *и* $(\widetilde{A}^0)' = \widetilde{(A')}^0$.

Доказательство. Действительно, с одной стороны при естественной аппроксимации $\overline{A}^0 = T_Y\, A\, S_X$ получим $(\overline{A}^0)' = S'_X\, A'\, T'_Y$. С другой стороны $\overline{(A')}^0 = T_{X'}\, A'\, S_{Y'} = S'_X\, A'\, T'_Y$. Поэтому "операции" $\overline{}^0$ и $'$ в определенном смысле перестановочны.

Кроме того, $(\widetilde{A}^0)' = (S_Y\, \overline{A}\, T_X)' = T'_X\, \overline{A}'\, S'_Y$ и $\widetilde{(A')}^0 = T'_X\, \overline{A'}\, S'_Y$. Заметим, что при $\overline{A}' \neq \overline{A'}$ второе равенство не выполняется. •

В дополнение к лемме 13.3 приведем еще пару формул:

$$\overline{(\widetilde{A}^0)}^0 = \overline{(S_Y\, \overline{A}\, T_X)}^0 = T_Y\, S_Y\, \overline{A}\, T_X\, S_X = \overline{A},$$

$$\widetilde{(\overline{A}^0)}^0 = (T_Y\, \widetilde{A}\, S_X)^0 = S_Y\, T_Y\, A\, S_X\, T_X \neq A.$$

Для сопряженных и алгебраически сопряженных пространств и операторов имеют место аналогичные утверждения.

14. Абстрактное линейное программирование

Линейное программирование — раздел теории экстремальных задач, посвященный методам поиска условного экстремума линейной функции на множестве, заданном с помощью линейных равенств и неравенств (см., например, [Ашм.ЛП]). Две классические задачи линейного программирования в стандартной постановке ставятся следующим образом: *прямая задача*

$$< c, x > \to \max, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \tag{14.1}$$

и *двойственная задача*

$$< b, y > \to \min, \quad A'y \geq c, \quad y \geq 0, \tag{14.2}$$

здесь $x \in R^n$ и $y \in R^m$ — искомые векторы, $c \in R^n$ и $b \in R^m$ — заданные векторы, A — заданная матрица размера $m \times n$, A' — транспонированная матрица.

Пространства, в которых рассматриваются задачи (14.1) и (14.2), являются конечномерными. Поставим вопрос: если считать эти задачи аппроксимирующими, то какими могут быть соответствующие им точные задачи?

Самый естественный вариант ответа — задачи *интегрального линейного программирования*: прямая задача

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} c(\tau)x(\tau)\,d\tau \to \max,$$
$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \le b(t),\ t\in[\gamma,\delta],\quad x(\tau)\ge 0,\ \tau\in[\alpha,\beta], \tag{14.3}$$

и двойственная задача

$$\int\limits_{\gamma}^{\delta} b(t)y(t)\,dt \to \min,$$
$$\int\limits_{\gamma}^{\delta} A(\tau,t)y(t)\,dt \ge c(\tau),\ \tau\in[\alpha,\beta],\quad y(t)\ge 0,\ t\in[\gamma,\delta]. \tag{14.4}$$

Будем предполагать, что здесь все функции непрерывны.

Действительно, зададим узлы аппроксимации $\tau_j\in[\alpha,\beta],\ j=1\,..\,N$ и $t_k\in[\gamma,\delta],\ k=1\,..\,M$. Заменим интегралы на суммы вида

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\,d\tau \approx \sum_{j=1}^{N} r_j\, f(\tau_j),\qquad \int\limits_{\gamma}^{\delta} g(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{M} s_k\, g(t_k),$$

здесь r_j и s_k — (неотрицательные) коэффициенты квадратурных формул. Обозначим $x_j = r_j\, x(\tau_j)$, $y_k = s_k\, y(t_k)$ и тогда получим из (14.3)

$$\sum_{j=1}^{N} c(\tau_j)\, x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{N} A(t_k,\tau_j)\, x_j \le b(t_k),\quad k=1\,..\,M,\quad x_j\ge 0,\quad j=1\,..\,N$$

и из (14.4)

$$\sum_{k=1}^{M} b(t_k)\, y_k \to \min,$$

$$\sum_{k=1}^{M} A(t_k, \tau_j)\, y_k \geq c(\tau_j), \quad j = 1\,..\,N, \qquad y_k \geq 0, \quad k = 1\,..\,M.$$

В качестве примера рассмотрим задачу о распределении силы вдоль упругой струны. Как известно (см. [КФ.ЭТФ], гл. 9, §1), для струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = l$, отклонение от положения равновесия под действием распределенной силы $p(x)$ вычисляется по формуле

$$u(x) = \int_0^l G(x,t)p(t)\,dt,$$

где $G(x,t)$ — функция Грина. Пусть нужно найти такое распределение силы вдоль струны при минимальной суммарной нагрузке, чтобы каждая точка струны вышла за пределы некоторой заданной области. Тогда получим задачу интегрального вариационного исчисления

$$\int_0^l p(t)\,dt \to \min, \qquad \int_0^l G(x,t)p(t)\,dt \geq q(x), \qquad p(t) \geq 0.$$

Покажем, как можно обобщить постановки прямой и двойственной задач линейного программирования, чтобы задачи интегрального линейного программирования оказались их частным случаем.

Пусть $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}, \mathrm{Y}'$ — *упорядоченные линейные пространства*, то есть частично упорядоченные множества с операциями сложения и умножения на скаляры, согласованными с упорядоченностью: 1) $x \geq x \ \ \forall x$; 2) если $x \geq y, \ y \geq z$, то $x \geq z$; 3) если $x \geq y, \ y \geq x$, то $x = y$; 4) если $x \geq y$, то $x + z \geq y + z \ \ \forall z$; 5) если $x \geq 0$ и $\lambda > 0, \ \lambda \in K$, то $\lambda x \geq 0$.

Будем предполагать также, что частичные упорядоченности в X и X' *согласованы* следующим образом: если $x' \geq 0$, то $< x, x' > \geq \geq 0 \ \ \forall x \in P_X^+$ (здесь P_X^+ — положительный конус в X, т. е. подмножество элементов, удовлетворяющих неравенству $x \geq 0$). Отсюда следует, что если $x_1' \geq x_2'$, то $< x, x_1' > \geq < x, x_2' > \quad \forall x \in P_X^+$. Пусть частичные упорядоченности в Y и Y' также согласованы.

Легко видеть, задачи (14.3) и (14.4) вкладываются в общую схему, состоящую из пары задач *абстрактного линейного программирования*: прямой задачи

$$< x, x_0' > \to \max, \qquad Ax \leq y_0', \qquad x \geq 0, \tag{14.5}$$

и двойственной задачи

$$< y, y_0' >\to \min, \quad A'y \geq x_0', \quad y \geq 0. \tag{14.6}$$

Для задач линейного программирования в абстрактной постановке остаются в силе многие факты, установленные в конечномерном случае. Докажем два простых утверждения.

Лемма 14.1. *Если x и y — допустимые элементы, то* $< x, x_0' >\leq< y, y_0' >$.

Доказательство. Если $x_0' \leq A'y$, то $< x, x_0' >\leq< x, A'y > \quad \forall x \in \in P_X^+$. С другой стороны, если $Ax \leq y_0'$, то $< y, Ax >\leq< y, y_0' > \quad \forall y \in P_Y^+$. Но по определению двойственного оператора $< x, A'y >=< y, Ax >$. •

Лемма 14.2. *Если x^0 и y^0 — допустимые элементы и* $< x^0, x_0' >=< y^0, y_0' >$, *то x^0 и y^0 — решения задач (14.5) и (14.6).*

Доказательство. Пусть x, y — произвольные допустимые элементы. Как следует из леммы 14.1, $< x, x_0' >\leq< y^0, y_0' >=< x^0, x_0' >\leq< y, y_0' >$. •

Предположим, что операторы аппроксимации и интерполяции сохраняют порядок в линейных пространствах: например, если $T_X : \mathrm{X} \to \overline{\mathrm{X}}$, то из $x \geq 0$ следует $\overline{x} = T_X x \geq 0$.

Задачу линейного программирования, аппроксимирующую прямую задачу (14.5), поставим следующим образом:

$$< \overline{x}, S_X' x_0' >\to \max, \quad T_{Y'} A S_X \overline{x} \leq T_{Y'} y_0', \quad \overline{x} \geq 0. \tag{14.7}$$

Здесь элементы точных пространств заменены на соответствующие им элементы аппроксимирующих пространств, а в качестве аппроксимирующего оператора $\overline{A} : \overline{\mathrm{X}} \to \overline{\mathrm{Y}'}$ выбран оператор естественной аппроксимации $\overline{A}^0 = T_{Y'} A S_X$.

Задача (14.7) может быть получена также в результате следующих рассуждений. Будем искать решение задачи (14.5) в виде $x = S_X \overline{x}$. Получим

$$< S_X \overline{x}, x_0' >\to \max, \quad A S_X \overline{x} \leq y_0', \quad S_X \overline{x} \geq 0.$$

В функционале перейдем от оператора S_X к двойственному, первое неравенство спроектируем на пространство $\overline{\mathrm{Y}}'$, а второе — заменим на $\overline{x} \geq 0$.

Теорема 14.1. *При естественной аппроксимации задача, двойственная к задаче, аппроксимирующей прямую задачу, аппроксимирует двойственную задачу.*

Доказательство. Выполним аналогичные действия для двойственной задачи (14.6). Будем искать ее решения в виде $y = S_Y \overline{y}$. Из

$$< S_Y \overline{y}, y_0' > \to \min, \quad A' S_Y \overline{y} \geq x_0', \quad S_Y \overline{y} \geq 0$$

следует, что

$$< \overline{y}, S_Y' y_0' > \to \min, \quad T_{X'} A' S_Y \overline{y} \geq T_{X'} x_0', \quad \overline{y} \geq 0. \tag{14.8}$$

Легко видеть, что задачи (14.7) и (14.8) являются двойственными. •

15. Аппроксимация экстремальных задач

Пусть X — нормированное пространство, $f : \mathrm{X} \to R^1$ — функционал, D — подмножество в X. Рассмотрим *экстремальную задачу* общего вида

$$f(x) \to \inf, \;\; x \in \mathrm{D} \subset \mathrm{X}. \tag{15.1}$$

При постановке задачи (15.1) обычно указывается, что нужно найти: или $f_* = \inf\limits_{x \in \mathrm{D}} f(x)$ — *минимальное значение функционала* (точнее, точную нижнюю грань его значений), или $\mathrm{D}_* = \{x \in \mathrm{D} \mid f(x) = f_*\}$ — множество *элементов, доставляющих минимум* функционалу, или и то, и другое. Может оказаться, что $\mathrm{D}_* = \emptyset$, если на элементах D точная нижняя грань не достигается. Наиболее желательна ситуация, когда в D_* содержится только один элемент.

Последовательность x_n элементов X называется *минимизирующей* для $f(x)$, если $f(x_n) \to f_*$ при $n \to +\infty$. Если функционал ограничен снизу, то его точная нижняя грань существует. Тогда минимизирующая последовательность может быть построена, но, вообще говоря, не единственным способом. Если $\mathrm{D}_* = \emptyset$, то минимизирующая последовательность x_n может сходиться к множеству D_* в том смысле, что $\rho(x_n, \mathrm{D}_*) \to 0$ при $n \to +\infty$ (здесь и далее ρ — расстояние от элемента до элемента, от элемента до множества или от множества до множества). Это не всегда имеет место. Но при определенных условиях любая минимизирующая последовательность к D_* сходится. Тогда за *приближенное* *решение* экстремальной задачи можно взять $f(x_N)$ и x_N при достаточно большом N.

Пусть $\overline{\mathrm{X}}$ — нормированное пространство, $\overline{f} : \overline{\mathrm{X}} \to R^1$ — функционал, $\overline{\mathrm{D}}$ — подмножество в $\overline{\mathrm{X}}$. Предположим, что $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{f}$ и $\overline{\mathrm{D}}$ аппроксимируют (ниже уточним, в каком смысле) X, f и D. Экстремальную задачу (15.1) будем называть *точной*, а задачу

$$\overline{f}(\overline{x}) \to \inf, \quad \overline{x} \in \overline{\mathrm{D}} \subset \overline{\mathrm{X}} \tag{15.2}$$

— *аппроксимирующей.*

Как правило, рассматривается не одна аппроксимирующая задача, а параметрическое их семейство. Пусть n — размерность пространства $\overline{X}$. Аппроксимирующие задачи вида (15.2) образуют *последовательность экстремальных задач*

$$\overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) \to \inf, \quad \overline{x}^{(n)} \in \overline{D}^{(n)} \subseteq \overline{X}^{(n)}. \tag{15.3}$$

В дальнейшем для краткости формул верхний индекс (n) не всегда будем указывать.

Уточним, в каком смысле задача (15.2) аппроксимирует задачу (15.1). Порядок аппроксимации пространства X пространством $\overline{\mathrm{X}}$ можно оценивать значением $\sup\limits_{x \in \mathrm{X}} ||S\,T\,x - x||$ (эта величина — функция параметра n). Близость функционалов в точной и в аппроксимирующей задачах определяет выражение

$$|f(x) - \overline{f}(Tx)|, \quad x \in \mathrm{X}$$

или

$$|f(S\overline{x}) - \overline{f}(\overline{x})|, \quad \overline{x} \in \overline{\mathrm{X}}.$$

Если считать, что $\overline{f}(\overline{x}) = f(S\overline{x})$ (наиболее естественный способ аппроксимации функционала), то второй способ оценки близости всегда даст нуль.

При сравнении множеств D и $\overline{\mathrm{D}}$, задающих дополнительные ограничения в задачах (15.1) и (15.2), можно использовать любое из выражений $\rho(\mathrm{D}, S(\overline{\mathrm{D}}))$ и $\rho(T(\mathrm{D}), \overline{\mathrm{D}})$. Если считать, что $\overline{\mathrm{D}} = \{\overline{x} \in \overline{\mathrm{X}} \mid S\overline{x} \in \in \mathrm{D}\}$, то первая оценка дает нуль. Если выбрать $\overline{\mathrm{D}} = T(\mathrm{D})$, то второе выражение обратится в нуль. В общем случае эти два способа сравнения множеств неравносильны.

Будем говорить, что *множества ограничений* D и $\overline{\mathrm{D}}$ в задачах (15.1) и (15.2) *согласованы*, если $Tx \in \overline{\mathrm{D}}$ при любом $x \in \mathrm{D}$ и, наоборот, $S\overline{x} \in \mathrm{D}$ при любом $\overline{x} \in \overline{\mathrm{D}}$.

Важный вопрос: если точная и аппроксимирующая задачи являются близкими, то насколько будут близкими значения f_* и $\overline{f}_*$, а также насколько близкими будут множества D_* и $\overline{D}_*$?

При *естественной аппроксимации* функционала $\overline{f}(\overline{x}) = f(S\overline{x})$, очевидно, $f_* \leq \overline{f}_*$. Тогда разность $\overline{f}_* - f_*$ можно рассматривать как погрешность аппроксимации по функционалу.

В работе [ББ] (см. также [Вас.МР], гл 3, §2) введено следующее определение: говорят, что *последовательность экстремальных задач* (15.3) *аппроксимирует задачу* (15.1) *по функционалу*, если

$$\lim_{n\to+\infty} f_*^{(n)} = f_*. \tag{15.4}$$

Там же получены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется это равенство ([Вас.МР], с. 307, теорема 1). Перенесем это утверждение и его доказательство на наш случай.

Теорема 15.1. *Последовательность экстремальных задач (15.3) аппроксимирует задачу (15.1) по функционалу тогда и только тогда, когда существуют такие отображения* $T^{(n)} : X \to \overline{X}^{(n)}$ *и* $S^{(n)} : \overline{X}^{(n)} \to X$, *что множества ограничений в задачах (15.1) и (15.3) согласованы и выполняются условия*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[\overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - f(x)] \leq 0 \quad \forall x \in D, \tag{15.5}$$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)})] \leq 0 \quad \forall \overline{x}^{(n)} \in \overline{D}^{(n)}. \tag{15.6}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть y_n — такая последовательность элементов D, что

$$\lim_{n\to+\infty}[f(y_n) - f_*] = 0 \tag{15.7}$$

(т. е. y_n — минимизирующая последовательность для $f(x)$). Пусть $\overline{y}^{(n)}$ — такая последовательность элементов $\overline{\mathrm{D}}^{(n)}$, что

$$\lim_{n\to+\infty}[\overline{f}^{(n)}(\overline{y}^{(n)}) - \overline{f}_*^{(n)}] = 0. \tag{15.8}$$

Построим отображения $T^{(n)}$ и $S^{(n)}$ так, что $T^{(n)} : x \mapsto \overline{y}^{(n)} \quad \forall x \in \mathrm{D}$ и $S^{(n)} : \overline{x}^{(n)} \mapsto \overline{y}^{(n)} \quad \forall \overline{x}^{(n)} \in \overline{\mathrm{D}}^{(n)}$.

Рассмотрим разность

$$\overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - f(x) = \overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - \overline{f}_*^{(n)} + \overline{f}_*^{(n)} - f_* + f_* - f(x).$$

Так как $f_* - f(x) \le 0$, то

$$\overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - f(x) \le \overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - \overline{f}_*^{(n)} + \overline{f}_*^{(n)} - f_*.$$

Найдем верхние пределы при $n \to +\infty$ слева и справа. Из (15.4) и (15.8) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[\overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - f(x)] \le 0.$$

Аналогично, рассмотрим разность

$$f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) = f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - f_* + f_* - \overline{f}_*^{(n)} + \overline{f}_*^{(n)} - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}).$$

Так как $\overline{f}_*^{(n)} - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) \le 0$, то

$$f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) \le f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - f_* + f_* - \overline{f}_*^{(n)}.$$

Найдем верхние пределы при $n \to +\infty$ слева и справа. Из (15.4) и (15.7) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)})] \le 0.$$

Достаточность. Пусть $x \in \mathrm{D}$. Рассмотрим разность

$$\overline{f}_*^{(n)} - f_* = \overline{f}_*^{(n)} - \overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) + \overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - f(x) + f(x) - f_*.$$

Так как $\overline{f}_*^{(n)} - \overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) \le 0$, то

$$\overline{f}_*^{(n)} - f_* \le \overline{f}^{(n)}(T^{(n)}x) - f(x) + f(x) - f_*.$$

Найдем верхние пределы при $n \to +\infty$ слева и справа. Из (15.5) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[\overline{f}_*^{(n)} - f_*] \le f(x) - f_*.$$

Перейдем в этом неравенстве к точным нижним граням. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}[\overline{f}_*^{(n)} - f_*] \le 0.$$

С другой стороны, пусть $\overline{x}^{(n)} \in \overline{\mathrm{D}}^{(n)}$. Рассмотрим разность

$$f_* - \overline{f}_*^{(n)} = f_* - f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) + f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) + \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}_*^{(n)}.$$

Так как $f_* - f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) \le 0$, то

$$f_* - \overline{f}_*^{(n)} \le f(S^{(n)}\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) + \overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}_*^{(n)}.$$

Найдем верхние пределы при $n \to +\infty$ слева и справа. Из (15.6) следует, что

$$\varlimsup_{n\to+\infty}[f_* - \overline{f}_*^{(n)}] \le \varlimsup_{n\to+\infty}[\overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) - \overline{f}_*^{(n)}].$$

Пусть $\overline{x}^{(n)}$ – такая последовательность, что $\overline{f}^{(n)}(\overline{x}^{(n)}) < \overline{f}_*^{(n)} + 1/n$. Тогда

$$\varlimsup_{n\to+\infty}[f_* - \overline{f}_*^{(n)}] \le 0.$$

Мы получили, что

$$0 \le -\varlimsup_{n\to+\infty}[f_* - \overline{f}_*^{(n)}] = \varliminf_{n\to+\infty}[f_* - \overline{f}_*^{(n)}] \le \varlimsup_{n\to+\infty}[\overline{f}_*^{(n)} - f_*] \le 0.$$

Отсюда следует, что выполняется равенство (15.4). •

Отметим, что при естественной аппроксимации $\overline{f}(\overline{x}) = f(S\overline{x})$ неравенство (15.6) в условии теоремы 15.1 выполняется автоматически, а неравенство (15.5) принимает вид

$$\varlimsup_{n\to+\infty}[f(STx) - f(x)] \le 0 \quad \forall x \in \mathrm{D}.$$

Получается так, что если аргумент функционала аппроксимировать, а потом восстановить интерполяцией, то значение функционала не должно увеличиваться.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.

2. Плещинский Н. Б. Абстрактная схема приближенных методов решения линейных операторных уравнений // Матер. Междунар. конф. и Чебышевских чтений, посв. 175-летию со дня рожд. П.Л.Чебышева. Т. 2. — М.: Изд-во механико-математич. ф-та МГУ, 1996. — с. 289-292.

3. Плещинский Н. Б. К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений // Изв. вузов. Матем. — 2000. — №3. — С.39–47.

4. Плещинский Н. Б. Абстрактная теория приближенных методов решения линейных задач // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.13. Казанск. матем. об-во. Матер. всеросс. мол. науч. шк.-конф. — Казань: Изд-во "ДАС 2001. — С.54–75.

5. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

6. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высш. шк., 1977. — 432 с.

7. Ашманов С. А. Линейное программирование. — М.: Наука, 1981. — 304 с.

8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

9. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980. — 520 с.

10. Будак Б. М., Беркович Е. М. Об аппроксимации экстремальных задач, I, II // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. — 1971. — 11, № 3. — С. 580–596; № 4. — С. 870–884.

11. Мухутдинов Р. Ш. Об аппроксимации задач классического и интегрального вариационного исчисления // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 29. Матем. моделирование и матем. физика. — Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2004. — С. 70–81.

12. Мухутдинов Р. Ш. Об аппроксимации задач линейного программирования // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. — Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2005. — С. 31–40.

13. Мухутдинов Р. Ш., Плещинский Н. Б. Об аппроксимации двойственных пространств и двойственных операторов // Изв. вузов. Матем.

— 2008. — № 10. — С. 31–38.

14. Плещинский Н. Б. Теория двойственности и операторы Нетера // Препринт ПМФ-09-01. — Казань: Казанск. матем. об-во, 2009. — 30 с.

Оглавление