[DEshrt.tex, 09.01.09]

Дифференциальные уравнения: конспект лекций

В 2006 году студент 2-го курса Д.В. Кальянов набрал в LaTeX'е конспект моих лекций по курсу "Дифференциальные уравнения". Я переписал его файл в своем стиле, а также внес некоторые исправления и дополнения. Длинные доказательства сокращены, а простые и короткие — вообще отсутствуют. Решения примеров также не вошли в этот текст. Вполне возможно, что кое-что получилось не так, как это было на лекциях. *PNB*

P.S. Если все распечатать мелким шрифтом, то получится что? :-)

Рекомендуемая литература (любое издание):

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.
2. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные ДУ и основы вариационного исчисления.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

1. Введение в теорию ДУ

Дифференциальные уравнения (ДУ) — основа математических моделей физических и других явлений и процессов. Основная цель теории ДУ — разработка методов поиска решений дифференциальных уравнений и исследование их свойств.

1.1. Основные определения и терминология

Уравнение называется *дифференциальным*, если в нем содержатся производные искомых функций или дифференциалы величин, зависимости между которыми нужно найти.

Обыкновенное ДУ порядка n имеет вид $F(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ (1), здесь x — независимая переменная, $y = y(x)$ — искомая функция.

Уравнение 1-го порядка в дифференциалах : $F(x, y, dx, dy) = 0$. В ДУ *с частными производными* искомая функция зависит от двух и более независимых переменных.

Решением ДУ (1) называют такую функцию $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Подразумевается, что эта функция дифференцируема достаточное число раз, а области определения уравнения и его решения согласованы.

По умолчанию все рассматриваемые функции принимают вещественные значения, но комплекснозначные решения ДУ также будут рассматриваться.

Любое конкретное решение ДУ называют его *частным решением. Общим решением* называется содержащая одну или несколько произвольных постоянных формула, по которой могут быть получены частные решения. У ДУ могут быть также *особые решения*, которые, как правило, не могут быть получены из общего решения. Точное определение будет дано позже.

Самый простой пример ДУ : $y' = f(x)$. Все его решения дает формула (общее решение) $y = \int f(x)\, dx + C$, где C — произвольная постоянная.

Если решение ДУ выражено через элементарные функции, то говорят, что оно найдено *в явном виде.* Если решение записано через элементарные функции и интегралы от них, то оно найдено *в квадратурах.* Решение ДУ может быть также найдено в виде таблицы или графика.

В некоторых случаях удается только доказать, что решение существует. Есть уравнения, решения которых существуют, не могут быть получены в квадратурах. Например, $y' = x^2 + y^2$.

Слова "в явном виде" не предполагают, что решение найдено как явная функция. Оно может быть записано также в неявной или в параметрической форме.

Чтобы выделить конкретное решение из множества всех решений ДУ, нужно задать дополнительные условия. Для ДУ 1-го порядка обычно задают *условие Коши* : $y(x_0) = y_0$. Геометрический смысл этого условия — график решения проходит через заданную точку.

Графики решений ДУ называют *интегральными кривыми.*

Если ДУ имеет вид $y' = f(x, y)$, то в каждой точке плоскости с координатами (x, y) известно направление интегральной кривой, проходящей через эту точку. На этом основан *метод изоклин* — графический метод решения ДУ.

Изоклина — это геометрическое место точек, в которых интегральные кривые ДУ имеют одно и то же направление. Уравнение изоклины $f(x, y) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к интегральной кривой относительно оси абсцисс. Идея следующая: выбрать несколько значений α, построить на плоскости соответствующие им изоклины и, начиная из некоторой точки, провести интегральную кривую так, чтобы она пересекала изоклины под нужным углом.

Пример: $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$.

Система обыкновенных ДУ может быть записана, например, так :
$F_j(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0,\ \ j = 1\,.\,.\,s \quad (2).$

Для систем ДУ графики решений обычно строятся в пространстве переменных $y_1, \ldots, y_n$. Это пространство называется *фазовым*, а интегральные кривые в нем — *траекториями.*

Пример: $y_1' = y_2,\ \ y_2' = -y_1$.

Теорема. *Любая система ДУ приводится к системе уравнений первого порядка.*

Доказательство. Рассмотрим систему ДУ (2). Введем новые искомые функции: $z_1 = y_1,\ z_2 = y_1', \ldots, z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)}, \ldots, z_{m_1+1} = y_2, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_n} = y_n^{(m_n-1)}$. Получим новую систему уравнений $F_j(x, z_1, z_2, \ldots, z_{m_1}, z_{m_1}', z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_n}') = 0,\ j = 1\,.\,.\,s$ и еще $z_1' = z_2,\ z_2' = z_3, \ldots, z_{m_1-1}' = z_{m_1}, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+1}' = z_{m_1+\ldots+m_{n-1}+2}, \ldots, z_{m_1+\ldots+m_n-1}' = z_{m_1+\ldots+m_n}$.

Пример. $y'' + y = 0$. Если $y_1 = y,\ \ y_2 = y'$, то система уравнений 1-го порядка $y_1' = y_2,\ \ y_2' = -y_1$.

1.2. Задачи на составление ДУ

1. **Задача о радиоактивном веществе**. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его массе. Найти зависимость массы вещества от времени.

Уравнение $m'(t) = -k\,m(t),\ k > 0$. Его решение $m(t) = c\,e^{-kt}$ или $m(t) = m(0)\,e^{-kt}$.

2. **Задача о пуле**. Пуля ударяет в доску толщиной 0.1 метра со скоростью 200 м/с и вылетает с другой стороны со скоростью 80 м/с. Найти время, в течение которого пуля находилась внутри доски. Указание: сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости.

Уравнение $m\,s'' = -k\,(s')^2$, здесь $s(t)$ — пройденный путь за время t.

3. **Задача о кривой.** Найти кривую на плоскости со следующим свойством: треугольник, образованный касательной к кривой и осями координат, имеет постоянную площадь.

Если построить такой треугольник и выразить его площадь через величины x, y и y' (тангенс угла наклона касательной), то получится ДУ : $(y - xy')\Big(x - \dfrac{y}{y'}\Big) = 2S$.

4. **Задача о зеркале.** Найти форму зеркала, которое отражает параллельно заданному направлению световые лучи, исходящие из точки.

Пусть (для простоты) зеркало является поверхностью вращения. Рассмотрим сечение искомой поверхности плоскостью, проходящей через ось симметрии. Тогда $y' = \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

5. **Задача о растворе**. В баке имеется M литров раствора соли. Каждую секунду из бака вытекает m литров раствора, доливается столько же воды, и смесь перемешивается. Найти зависимость концентрации раствора от времени.

Пусть $x(t)$ — масса соли в баке в момент времени t. Как изменится эта величина за малый промежуток времени Δt? Очевидно, что $x(t + \Delta t) = x(t) - m\,\dfrac{x(t)}{M}\,\Delta t$. Поделим на Δt, перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$ и получим $x'(t) = -\dfrac{m}{M}\,x(t)$. Решение этого ДУ : $x(t) = x(0)\,e^{-\frac{m}{M}t}$.

2. Уравнения 1-го порядка, разрешаемые в квадратурах

ДУ 1-го порядка, разрешенные относительно производной, записывают или *в нормальной форме* $y' = f(x, y)$ или *в дифференциалах* $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$.

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $p_1(x)\,p_2(y)\,dx + q_1(x)\,q_2(y)\,dy = 0$ называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Теорема 1. *Уравнение с разделяющимися переменными разрешаемо в квадратурах.*

Доказательство. Поделим обе части уравнения на $p_2(y)q_1(x)$ (считаем, что это выражение — не нуль). Найдется функция, дифференциал которой совпадает с левой частью нового уравнения. Тогда эта функция — постоянная. Поэтому общее решение $\displaystyle\int \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\,dx + \int \frac{q_2(y)}{p_2(y)}\,dy = C$.

Замечание. Следует проверить, не потеряны ли решения вида $q_1(x) = 0$ и $p_2(y) = 0$.

Уравнение в нормальной форме является уравнением с разделяющимися переменными, если $f(x, y) = f_1(x)\,f_2(y)$.

Пример 1. $xy\,dx + (x + 1)\,dy = 0$.

Пример 2. $y' = \cos(x - y - 1)$. Здесь нужна замена искомой функции.

2.2. Однородные уравнения и приводящиеся к ним

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ называется *однородным уравнением*. Эквивалентное определение: уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ называется однородным, если найдется такое α, что $P(tx,ty) = t^\alpha P(x,y),\ \ Q(tx,ty) = t^\alpha Q(x,y)\ \ \forall t,x,y$.

Теорема 2. *Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.*

Доказательство. Введем новую искомую функцию $z = \dfrac{y}{x}$. Если уравнение в нормальной форме, то $y' = z'x + z$ и тогда новое уравнение $z'x + z = f(z)$. Если уравнение в дифференциалах, то $dy = zdx + xdz$ и, следовательно, $[P(1,z) + Q(1,z)z]\,dx + Q(1,z)x\,dz = 0$.

Пример 3. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$.

Пример 4. $\left(xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}\right) dx - x^2\,dy = 0$.

Следствие. *Уравнение вида* $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ *разрешаемо в квадратурах.*

Доказательство. Если $d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то нужно ввести новую искомую функцию $z = a_1x + b_1y$. Если же $d \neq 0$, то y и x заменяются на $z = a_1x + b_1y + c_1$ и $t = a_2x + b_2y + c_2$.

Пример 5. $(x + y - 2)\,dx - (x - y + 4)\,dy = 0$.

2.3. Линейные уравнения 1-го порядка

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется *линейным уравнением 1-го порядка.*

Теорема 3. *Линейное уравнение 1-го порядка разрешаемо в квадратурах.*

Доказательство. Уравнение $y' + p(x)y = 0$ имеет решение $y = C\,e^{-\int p(x)\,dx}$, где C — произвольная постоянная.

Будем искать решение исходного уравнения в виде $y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$, где $C(x)$ — новая искомая функция.

Пример 6. $y' + 2y = x$.

Следствие. *Уравнение Бернулли* $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1)$ *разрешаемо в квадратурах.*

2.4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой дифференциал некоторой функции. Следовательно, если $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, то решение этого уравнения $F(x,y) = C$.

Пример 7. $y\,dx + x\,dy = 0$.

Теорема 4. *Уравнение* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда* $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность доказывается в курсе мат. анализа :-)

Пример 8. $y\,dx - x\,dy = 0$. Это уравнение — не в полных дифференциалах.

Функция $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* для уравнения $P\,dx + Q\,dy = 0$, если после умножения на нее уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 5. *Если найдется такая функция* $\omega(x,y)$, *что*
$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f[\omega(x,y)]$, *то интегрирующий множитель* $\mu = e^{\int f(\omega)\,d\omega}$.

Доказательство. После умножения на интегрирующий множитель получим $\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$. По теореме 4 должно выполняться равенство $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = 0$. Раскроем скобки и получим $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial \mu}{\partial x}Q - \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Если $\mu = \mu[\omega(x,y)]$, то $\mu'\dfrac{\partial \omega}{\partial y}P + \mu\dfrac{\partial P}{\partial y} - \mu'\dfrac{\partial \omega}{\partial x}Q - \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Отсюда $\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f[\omega(x,y)]$. Если правая часть — функция от μ, то μ легко найти.

К сожалению, общего правила для выбора функции ω нет. Два самых простых частных случая: $\omega = x$ и $\omega = y$.

Пример 9. $(x^2+y^2+y)\,dx - x\,dy = 0$. Можно взять $\omega(x,y) = x^2+y^2$.

3. Существование и единственность решения задачи Коши

Докажем, что при некоторых условиях существует единственное решение ДУ $y' = f(x,y) \quad (1)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0 \quad (2)$.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) \mid |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}$.

Функция $g(y)$ удовлетворяет *условию Липшица* на множестве Y, если $\exists L > 0 \mid |g(y_1) - g(y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \ \ \forall y_1, y_2 \in Y$. Число L — постоянная Липшица.

Условие Липшица сильнее, чем непрерывность, но слабее, чем дифференцируемость.

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица по y, то в некоторой окрестности (x_0-h, x_0+h) точки x_0 существует единственное решение задачи Коши.*

План доказательства.

1. Перейдем от задачи Коши к интегральному уравнению (ИУ).
2. Построим специальную последовательность функций.
3. Докажем, что эта последовательность равномерно сходится.
4. Докажем, что ее предел — решение ИУ.
5. Докажем вспомогательную лемму об интегральных неравенствах.
6. Докажем, что решение может быть только одно.

3.1. Существование решения

1. Перейдем от задачи Коши к интегральному уравнению (ИУ).

Пусть $y(x)$ — решение задачи Коши (1), (2), определенное в интервале (x_0-h, x_0+h). Тогда выполняется тождество $y'(x) = f(x, y(x))\ \forall x \in (x_0-h, x_0+h)$. Интегрируем это тождество от x_0 до x: $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt,\ x \in (x_0-h, x_0+h) \quad (3)$. Получили, что $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3).

Если $y(x)$ — решение уравнения (3), то $y(x)$ является также решением задачи Коши.

2. Построим последовательность функций по следующему правилу.

Пусть $\varphi_0(x) = y_0,\ \varphi_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0)\ dt,\ \ldots,\ \varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt \quad (4)$. Чтобы эти формулы имели смысл, должно выполняться условие $|\varphi_n(x) - y_0| \le b\ \forall x \in (x_0-h, x_0+h),\quad n = 0, 1, \ldots$

Выберем h так, чтобы это условие выполнялось. При $n=0$ $|\varphi_0(x) - y_0| = 0 \le b$.

Обозначим $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)| \quad (5)$. При $n = 1$ $|\varphi_1(x) - y_0| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0)\ dt\right| \le M\,|x-x_0| \le Mh$. Пусть $h = \min\left(\dfrac{b}{M}, a\right) \quad (6)$. Тогда $|\varphi_1(x) - y_0| \le b$.

Применим метод математической индукции. Предположим, что $|\varphi_{n-1}(x) - y_0| \le b$ и оценим $|\varphi_n(x) - y_0| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt\right| \le Mh \le b$.

3. Докажем, что последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится.

Рассмотрим функциональный ряд $\varphi_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \quad (7)$.

Частичные суммы ряда $S_n(x) = \varphi_n(x)$. Поэтому ряд равномерно сходится тогда и только тогда, когда равномерно сходится последовательность $\varphi_n(x)$.

Оценим члены ряда. При $k = 1$ $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \le M|x-x_0|$. При $k = 2$ $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t))|\ dt\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} L|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)|\ dt\right| \le ML\frac{|x-x_0|^2}{2}$.

Применим метод математической индукции. Предположим, что $|\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)| \le ML^{n-2}\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$. Тогда $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \varphi_{n-2}(t))|\ dt\right| \le ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}$. Отсюда следует, что $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} \quad (8)$.

Функциональный ряд (7) мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}$. Числовой ряд сходится по признаку Даламбера : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{Lh}{n+1} \to 0 < 1$ при $n \to +\infty$. Поэтому функциональный ряд сходится равномерно.

4. Докажем, что предел последовательности $\varphi_n(x)$ — решение ИУ.

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$. Перейдем к пределу при $n \to +\infty$ в равенстве $\varphi_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt$. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна и последовательность $\varphi_n(x)$ равномерно сходится, то последовательность $f(x, \varphi_n(x))$ тоже равномерно сходится. Тогда $\varphi(x) = y_0 + \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt = \int\limits_{x_0}^{x} \lim\limits_{n\to+\infty} f(t, \varphi_{n-1}(t))\ dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_{n-1}(t))\ dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\ dt$. Таким образом, $\varphi(x)$ — решение ИУ (3), а тогда $\varphi(x)$ — решение задачи Коши.

3.2. Единственность решения

5. Докажем вспомогательную лемму об интегральных неравенствах.

Лемма (Гронуола-Беллмана). *Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $A > 0,\ B > 0$. Если $|y(x)| \le A + B\Big|\int\limits_{x_0}^{x} |y(t)|\ dt\Big| \quad \forall x, x_0 \in [a, b], \quad (I)$ то $|y(x)| \le Ae^{B|x-x_0|} \quad \forall x, x_0 \in [a, b]. \quad (II)$*

Доказательство. Обозначим $N = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$. Пусть для определенности $x > x_0$. Тогда из неравенства (I) $|y(x)| \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} |y(t)|\ dt \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} N\ dt = A + BN(x - x_0)$.

Подставим правую часть этого неравенства в неравенство (I) : $|y(x)| \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} [A + BN(t - x_0)]\ dt = A + BA(x - x_0) + B^2N\frac{(x-x_0)^2}{2}$. Подставим правую часть этого неравенства в неравенство (I)... и так далее. На шаге с номером n получим $|y(x)| \le A + BA(x - x_0) + \ldots + B^nA\frac{(x-x_0)^n}{n!} + B^{n+1}N\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$. Перейдем к пределу при $n \to +\infty$. Получим $|y(x)| \le Ae^{B(x-x_0)}$.

Если $x < x_0$, то $|y(x)| \le Ae^{B(x_0-x)}$. Неравенство (II) доказано.

6. Докажем, что у задачи Коши может быть только одно решение.

Предположим, что функции $\varphi(x), \psi(x)$ — решения интегрального уравнения (3). Тогда $\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\ dt,\ \psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\ dt$.

Рассмотрим разность $\varphi(x) - \psi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} [f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))]\ dt$. Оценим абсолютную величину $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))|\ dt\Big| \le$ (условие Липшица) $\le L\Big|\int\limits_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|\ dt\Big|$. Применим лемму об интегральных неравенствах и получим $|\varphi(x) - \psi(x)| \le 0$. Следовательно, $\varphi(x) = \psi(x)\ \ \forall x$.

Замечания. Если функция $f(x, y)$ по y не удовлетворяет условию Липшица, а только непрерывна, то можно доказать существование решения и нельзя доказать его единственность.

Метод доказательства существования решения — это метод последовательных приближений Пикара.

Пример. Задача Коши $y' = \sqrt{y},\ \ y(0) = 0$ имеет два решения : $y = x^2/2$ и $y = 0$. Почему два?

3.3. Принцип сжимающих отображений

Множество X — *метрическое пространство*, если каждой паре x, y его элементов поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x, y)$ (*расстояние* или *метрика*) и выполнены три условия:

1) $\rho(x, y) \ge 0,\ \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)\ \ \forall x, y, z \in X$.

Последовательность элементов x_n *сходится* к элементу a, если $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Последовательность элементов x_n называется *фундаментальной*, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid \rho(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall n, m > N$.

Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится.

Полными метрическими пространствами являются множества вещественных и комплексных чисел, множество n-мерных векторов (с вещественными или с комплексными компонентами), а также $C([a,b])$ — множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, с метрикой $\rho(x(t),y(t)) = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$.

Элемент $x \in X$ — *неподвижная точка* отображения $A : X \to X$, если $A(x) = x$.

Отображение $A : X \to X$ называется *сжимающим*, если при некотором $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство $\rho(A(x),A(y)) \le \alpha\,\rho(x,y)\ \ \forall x,y \in X$.

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Любое сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ — произвольный элемент. Построим последовательность элементов $x_1 = A(x_0),\ x_2 = A(x_1),\ldots, x_n = A(x_{n-1}),\ldots$

Покажем, что последовательность x_n фундаментальна. Рассмотрим $\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(A(x_n),A(x_{n-1})) \le \alpha\rho(x_n,x_{n-1}) \le \ldots \le \alpha^n\rho(x_1,x_0)$.

Пусть $m = n+p$. Тогда $\rho(x_m,x_n) \le \rho(x_{n+p},x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1},x_{n+p-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1},x_n) \le (\alpha^{n+p}+\alpha^{n+p-1}+\ldots+\alpha^n)\rho(x_1,x_0) \le \alpha^n\rho(x_1,x_0)(\alpha^p+\ldots+1) = \alpha^n\rho(x_1,x_0)\frac{1-\alpha^{p+1}}{1-\alpha}$.
Если $n \to +\infty$, то правая часть неравенства стремится к нулю. Таким образом, x_n — фундаментальная и, следовательно, сходящаяся последовательность.

Пусть $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Покажем, что a — неподвижная точка отображения A. В неравенстве $\rho(a,A(a)) \le \rho(a,x_n) + \rho(x_n,A(a)) = \rho(a,x_n) + \rho(A(x_{n-1}),A(a)) \le \rho(a,x_n) + \alpha\rho(x_{n-1},a)$ перейдем к пределу при $n \to +\infty$. Получим $\rho(a,A(a)) = 0$. Следовательно, $A(a) = a$.

Покажем, что неподвижная точка может быть только одна. Пусть $a = A(a)$ и $b = A(b)$. Тогда $\rho(a,b) = \rho(A(a),A(b)) \le \alpha\rho(a,b)$. Отсюда $(1-\alpha)\rho(a,b) \le 0$ и $\rho(a,b) = 0$. Поэтому $a = b$.

Следствие. *При достаточно малых h решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение $y(t) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$. Пусть $C([x_0-h,x_0+h])$ — метрическое пространство функций, непрерывных на $[x_0-h,x_0+h]$. Построим отображение: $A : y(t) \mapsto y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$.

Оценим расстояние $\rho(A(y(x)),A(z(x))) = \max\limits_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int\limits_{x_0}^{x}[f(t,y(t))-f(t,z(t))]\,dt\right| \le$

$$\le L\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int\limits_{x_0}^{x}|y(t)-z(t)|\,dt\right| \le L\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}\left|\int\limits_{x_0}^{x}\rho(y(t),z(t))\,dt\right| \le Lh\rho(y(x),z(x)).$$

Если $Lh < 1$, то отображение A — сжимающее. Тогда ИУ имеет единственное решение.

4. Приближенные и численные методы решения задачи Коши

Пусть на отрезке $[x_0, x_0+a]$ нужно найти решение задачи Коши $y' = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0$. Предположим, что условия теоремы существования и единственности решения выполнены.

Будем называть *приближенным решением* задачи Коши функцию, достаточно близкую к точному решению. Обозначим $y(x)$ точное решение задачи Коши, $\tilde{y}(x)$ — приближенное решение.

На практике обычно выбирают некоторое множество значений независимой переменной $x_j,\ j = 0\,..\,N$ и находят соответствующие им значения приближенного решения $\tilde{y}_j = \tilde{y}(x_j),\ j = 0\,..\,N$. Численным решением задачи Коши будем называть множество пар $(x_j,\tilde{y}_j),\ j = 0\,..\,N$.

Если найдено численное решение задачи Коши, то ее приближенное решение может быть построено, например, как интерполяционный полином Лагранжа: $\tilde{y}(x) = \sum\limits_{j=0}^{N}\tilde{y}_j\prod\limits_{k=0,\,k\ne j}^{N}\dfrac{x-x_k}{x_j-x_k}$.

Иногда численным решением называют множество коэффициентов разложения приближенного решения по заданной системе функций.

4.1. Метод последовательных приближений

Метод доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши можно использовать при построении алгоритма ее численного решения. Можно взять $\tilde{y}(x) = \varphi_M(x)$, где M — некоторое достаточно большое число.

Алгоритм метода последовательных приближений в общем случае состоит в следующем. Обозначим $\tilde{\varphi}_{m,j} = \varphi_m(x_j)$. Тогда

$\tilde{\varphi}_{0,j} = y_0,\ \ j = 0\,.\,.\,N$ и $\varphi_{n,j} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_j} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,dt,\ \ j = 0\,.\,.\,N,\ \ n = 1, 2, \ldots$.

Для приближенного вычисления интегралов используем квадратурную формулу $\int\limits_{x_0}^{x_{j+1}} f(t)\ dt = \sum\limits_{k=0}^{j} A_k\, f(x_k)$, где A_k — некоторые коэффициенты (не зависящие от функции $f(t)$). Если используется формула левых прямоугольников, то $A_k = \{x_k - x_{k-1},\ \ k \neq j;\ \ 0,\ \ k = j\}$. Тогда
$\tilde{\varphi}_{n,j} = y_0 + \sum\limits_{k=0}^{j} A_k f(x_k, \tilde{\varphi}_{n-1,k}),\ \ j = 0\,.\,.\,N,\ \ n = 1\,.\,.\,M.$

В частном случае, когда $x_k - x_{k-1} = h$ (равноотстоящие узлы) и используется формула левых прямоугольников для приближенного вычисления интеграла,
$\tilde{\varphi}_{0,j} = y_0$ и $\tilde{\varphi}_{n,j} = y_0 + h\sum\limits_{k=0}^{j-1} f(x_k, \tilde{\varphi}_{n-1,k}),\ \ j = 0\,.\,.\,N,\ \ n = 0\,.\,.\,M.$

4.2. Метод Эйлера и метод Рунге-Кутта

При численном решении задачи Коши $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$ лучше использовать алгоритм *метода Эйлера.*

Выберем на отрезке $[x_0, x_0 + a]$ узлы $x_j,\ \ j = 0\,.\,.\,N$. Будем искать значения приближенного решения $\tilde{y}_j = \tilde{y}(x_j),\ \ j = 0\,.\,.\,N$ следующим образом:

1) $\tilde{y}_0 = y_0$;

2) $\tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + f(x_j, \tilde{y}_j)\,(x_{j+1} - x_j),\ \ j = 0\,.\,.\,N-1.$

Этот алгоритм основан на следующей простой идее. Равенство $y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$ заменяется на приближенное равенство $\dfrac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = f(x_j, y(x_j)).$

Геометрический смысл метода: через каждую точку с координатами $x_j, \tilde{y}_j$ проводится касательная к графику интегральной кривой до пересечения с вертикалью $x = x_{j+1}$.

Ломаная, соединяющая точки $(x_j, \tilde{y}_j)$, называется ломаной Эйлера. Эта ломаная — график приближенного решения, полученного из численного решения кусочно-линейной интерполяцией.

Метод Эйлера можно улучшить (*метод Эйлера с выравниванием*) :

1) $\tilde{y}_0 = y_0$;

2) $m_1 = f(x_j, \tilde{y}_j),\quad m_2 = f(x_{j+1}, \tilde{y}_j + m_1(x_{j+1} - x_j)),\quad \tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \frac{m_1 + m_2}{2}\,(x_{j+1} - x_j),\ \ j = 0\,.\,.\,N-1.$

Алгоритм *метода Рунге-Кутта* немного сложнее, но существенно точнее. Для равноотстоящих узлов

1) $\tilde{y}_0 = y_0$;

2) $m_1 = f(x_j, \tilde{y}_j),\ \ m_2 = f(x_j + \frac{h}{2}, \tilde{y}_j + \frac{h}{2}m_1),\ \ m_3 = f(x_j + \frac{h}{2}, \tilde{y}_j + \frac{h}{2}m_2),\ \ m_4 = f(x_j + h, \tilde{y}_j + hm_3),$
$\tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6}\,h,\ \ j = 0\,.\,.\,N-1.$

Пример. $y' = y,\ \ y(0) = 1,\ \ [0, 1],\ \ h = 0.2.$

4.3. Погрешность метода Эйлера

Пусть $y(x)$ — точное решение задачи Коши $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$ на отрезке $[x_0, x_0 + a]$. Пусть $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j),\ \ j = 0\,.\,.\,N$ — ее численное решение, полученное методом Эйлера. Построим приближенное решение с помощью кусочно-линейной интерполяции: $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_j + \frac{\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j}{x_{j+1} - x_j}\,(x - x_j),\ \ x \in [x_j, x_{j+1}]$.

Обозначим $\delta(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ *погрешность метода Эйлера.*

Теорема. *Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по x и по y, то $|\delta(x)| \leq O(h)$,* $h = \max\limits_{j=0\,.\,.\,N-1}(x_{j+1} - x_j).$

Доказательство. Вычислим производную погрешности при $x \in [x_j, x_{j+1}]$:
$\delta'(x) = y'(x) - \tilde{y}'(x) = f(x, y(x)) - f(x_j, \tilde{y}_j) =$ (вычитаем и добавляем)
$= f(x, y(x)) - f(x_j, y(x)) + f(x_j, y(x)) - f(x_j, \tilde{y}(x)) + f(x_j, \tilde{y}(x)) - f(x_j, \tilde{y}_j).$
Тогда $|\delta'(x)| \leq L\,|x - x_j| + L\,|y(x) - \tilde{y}(x)| + L\,|\tilde{y}(x) - \tilde{y}_j|.$

Обозначим $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$ (так как функция $f(x, y)$ непрерывна, то такое M существует). Очевидно, что $\delta(x) \leq \int\limits_{x_0}^{x} \delta'(t)\ dt + \delta(x_0)$, причем $\delta(x_0) = 0$. Поэтому $|\delta(x)| \leq L(M+1)ha + L\int\limits_{x_0}^{x} |\delta(t)|\ dt.$

Применим лемму об интегральных неравенствах : $|\delta(x)| \leq L(m+1)hae^{La} = \mathrm{const}\cdot h = O(h).$

Замечания. Реальная погрешность численного метода всегда меньше теоретической. Из теоремы следует, что $|\delta(x)| \to 0$ при $h \to 0$, т. е. решение задачи Коши существует и единственно.