[vcoc01.tex, 13.06.10] ©*PNB*

1. Терминология и постановки задач

Вариационное исчисление и *оптимальное управление* — близкие друг к другу разделы общей теории экстремальных задач.

1.1. Постановки экстремальных задач

Абстрактная экстремальная задача ставится так:

$$f(x) \to \mathrm{extr}, \quad x \in \mathcal{X} \subset X.$$

В ее постановку входят три элемента: *множество* X, на котором определен (вещественнозначный) *функционал* $f(x)$, и *ограничения*, которые выделяют подмножество $\mathcal{X}$ в X.

Поиск экстремума — это поиск или максимума, или минимума. Предполагается, что в множестве X определены окрестности $U(x)$ элементов x. Тогда говорят, что элемент x^0 доставляет локальный минимум функционалу $f(x)$, если $f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in U(x^0)$. Иногда требуется найти только элемент x^0, иногда — значение $f(x^0)$ функционала на нем, а по умолчанию — и то, и другое.

Пусть часть ограничений задана как равенство вида $F(x) = 0$, которому должны удовлетворять искомые элементы. Тогда постановка экстремальной задачи уточняется:

$$f(x) \to \mathrm{extr}, \quad F(x) = 0, \quad x \in \mathcal{X} \subset X.$$

Здесь возможны две точки зрения: или нужно найти элементы, доставляющие экстремум функционалу при дополнительном ограничении в виде равенства; или нужно найти решения уравнения $F(x) = 0$, доставляющие экстремум.

В задачах управления предполагается, что *состояние* x некоторого объекта (или процесса) зависит от *управления* u. Пару (x, u) обычно называют процессом. В задачах оптимального управления нужно найти *оптимальный процесс* — $x^0, u^0)$ — наилучший в каком-то смысле. Поэтому общая постановка задачи ОУ

$$f(x, u) \to \mathrm{extr}, \quad F(x, u) = 0, \quad (x, u) \in \mathcal{M} \subset X \times U.$$

Различают стационарные и нестационарные задачи ОУ, задачи с сосредоточенными параметрами и задачи с распределенными параметрами — это зависит от свойств элементов пространств X и U.

Как правило, в задачах ВИ и ОУ искомыми элементами являются функции. Функционалы рассматриваются *интегральные*, *терминальные* и *смешанные*. Например, простейшей задачей классического вариационного исчисления называют задачу

$$f[x(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt \to \mathrm{extr}, \quad x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Рассмотрим конкретные примеры постановок задач.

1.2. Примеры задач ВИ и ОУ

Задача о брахистохроне (И. Бернулли, 1696)

Пусть материальное тело движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести вдоль некоторой кривой. Какой должна быть эта кривая, чтобы путь был пройден за минимальное время?

Предположим, что тело движется из точки $A(0, 0)$ в точку $B(x_1, y_1)$. По закону Галилея в точке с ординатой $y(x)$ скорость тела $\sqrt{2gy(x)}$. Так как на участке от $(x, y(x))$ до $(x + dx, y(x) + dy)$ длина дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, то формализация задачи имеет вид

$$\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx \to \inf, \quad y(0) = 0, \;\; y(x_1) = y_1.$$

Задача Дидоны (825 г. до н.э.)

Как отгородить веревкой заданной длины участок морского берега максимальной площади?

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt \to \sup, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+[x'(t)]^2}\,dt = l, \quad x(\cdot) \in C^1([t_0,t_1]), \quad x(t_0)=x_0, \quad x(t_1)=x_1.$$

Задача о распределении нагрузки вдоль упругой струны

Если на тонкую упругую невесомую нить действует сила, то нить отклоняется от положения равновесия. Как должна быть распределена нагрузка вдоль струны, чтобы ее отклонение было наиболее близким к заданному?

$$\int\limits_0^l \left[\int\limits_0^l p(\xi)G(x,\xi)\,d\xi - u_0(x)\right]^2 dx \to \min, \quad \int\limits_0^l p(\xi)\,d\xi = C.$$

Оптимальное управление температурой стержня

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + f(s,t), \quad (s,t) \in Q = \{0<s<l,\ 0<t<T\},$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0,\ \ 0<t\le T, \quad \frac{\partial x}{\partial s}\Big|_{s=l} = \nu[p(t)-x(l,t)],\ \ 0<t\le T, \quad x\Big|_{t=0} = \varphi(s),\ \ 0\le s\le l,$$

$$\int\limits_0^l [x(s,T)-x_0(s)]^2\,ds \to \min$$

— при какой плотности источников тепла $f(s,t)$ внутри и при какой температуре окружающей среды $p(t)$ распределение температуры в стержне будет наиболее близким к заданному $x_0(s)$?

Простейшая задача о быстродействии

Нужно перегнать тележку с одной позиции на другую за минимальное время при ограничении на силу тяги двигателя:

$$t_1 \to \inf, \quad mx''(t) = u(t), \quad x(t_0)=x_1,\ \ x'(t_0)=x_2, \quad x(t_1)=a,\ \ x'(t_1)=0,$$

$$|u(t)| \le u_0 \ \ \forall t \in [t_0,t_1].$$

Задача о расширенном воспроизводстве

Пусть $x(t)$ — выручка от продажи продукции предприятия и $u(t)$ — ее доля, направляемая на расширение производства. Тогда уравнение состояний (с начальным условием)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha u(t)x(t),\ \ \alpha>0, \quad x(0)=a,\ \ a>0.$$

Пусть расходы предприятия пропорциональны доходу: $\beta x(t)$, $\beta>0$. Ясно, что $0 \le u(t) \le 1-\beta$.

Сумма налога назначается по остатку $x(t)-\beta x(t)-u(t)x(t)$. Поэтому чистая прибыль — также функция от остатка. Отсюда возникает следующая задача:

$$\Phi[x(\cdot),u(\cdot)] = \int\limits_0^T \varphi[(1-\beta-u(t))x(t)]\,dt \to \max, \quad 0 \le u(t) \le 1-\beta.$$

[vcoc02.tex, 13.06.10] ©*PNB*

2. Классическое вариационное исчисление

Первой задачей вариационного исчисления была задача о брахистохроне (И.Бернулли, 1696). В задачах КВИ, как правило, подинтегральные функции интегральных функционалов зависят от искомых функций и их производных.

2.1. Простейшая задача КВИ

Простейшая задача КВИ состоит в следущем:

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1, \quad x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]). \tag{1}$$

Норма в пространстве $C^1([t_0, t_1])$

$$||x(\cdot)|| = \max\Big(\max_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|, \max_{t\in[t_0,t_1]} |x'(t)| \Big).$$

Получим необходимое условие экстремума в задаче (1) на основании известного принципа: вычислим вариацию (производную) функционала (она существует, возможно, при дополнительных предположениях) и приравняем ее нулю.

Чтобы дополнительные ограничения $x(t_0) = x_0, \;\; x(t_1) = x_1$ всегда были выполнены, будем рассматривать приращения функций $x(\cdot)$ из подпространства $C_0^1([t_0, t_1])$ — множества непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям $x(t_0) = 0, \;\; x(t_1) = 0$.

Пусть $h(\cdot) \in C_0^1$. *Первой вариацией* функционала $\mathrm{I}\,[x(\cdot)]$ называется

$$\delta\mathrm{I}\,[x(\cdot); h(\cdot)] = \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\mathrm{I}\,[x(\cdot) + \lambda h(\cdot)] - \mathrm{I}\,[x(\cdot)]}{\lambda}$$

(если этот предел существует). Ясно, что

$$\delta\mathrm{I}\,[x(\cdot); h(\cdot)] = \frac{d}{d\lambda}\mathrm{I}\,[x(\cdot) + \lambda h(\cdot)]\Big|_{\lambda=0}.$$

Легко видеть, что если $x^0(\cdot)$ — решение задачи (1) и первая вариация функционала существует, то $\delta\mathrm{I}\,[x^0(\cdot); h(\cdot)] = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_0^1$ (необходимое условие экстремума).

Предположим, что функция $L(t, x, y)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial L}{\partial x}, \; \dfrac{\partial L}{\partial y}$ непрерывны. Тогда

$$\delta\mathrm{I}\,[x(\cdot); h(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t))\,h(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(t, x(t), x'(t))\,h'(t) \Big\}\,dt.$$

Предположим дополнительно, что у функции $L(t, x, y)$ непрерывны вторые частные производные. Проинтегрируем по частям и получим

$$\delta\mathrm{I}\,[x(\cdot); h(\cdot)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{ \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) \Big\}\,h(t)\,dt.$$

Лемма 1 . (лемма Лагранжа)
Если $a(\cdot) \in C([t_0, t_1])$ *и*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\,h(t)\,dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_0^1([t_0, t_1]),$$

то $a(t) = 0 \;\; \forall t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\exists \tilde{t} \mid a(\tilde{t}) > 0$.
Тогда $\exists \varepsilon > 0 \ \mid \ a(t) > a(\tilde{t})/2 \quad \forall t \in (\tilde{t}-\varepsilon, \tilde{t}+\varepsilon) \subset (t_0, t_1)$.
Функция

$$\tilde{h}_\varepsilon(t) = 1 + \cos\frac{\pi(t-\tilde{t})}{\varepsilon} \ \text{ при } \ t \in (\tilde{t}-\varepsilon, \tilde{t}+\varepsilon) \ \text{ и } \ \tilde{h}_\varepsilon(t) = 0 \ \text{ при } \ t \notin (\tilde{t}-\varepsilon, \tilde{t}+\varepsilon)$$

такова, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\, \tilde{h}_\varepsilon(t)\, dt = 0.$$

Противоречие. •

Теорема 1 . (необходимое условие экстремума 1-го порядка в простейшей задаче)
Пусть функция $L(t,x,y)$ имеет непрерывные 2-е частные производные. Если функция $x^0(\cdot)$ – решение задачи (1), то она удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in (t_0, t_1) \tag{2}$$

и краевым условиям $x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1$.

Доказательство. Применим лемму 1 к формуле, по которой вычисляется выражение первой вариации. •

Пример. Чтобы доказать, что кратчайшее расстояние между точками на плоскости — прямая, рассмотрим экстремальную задачу

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + [x'(t)]^2}\, dt \to \min, \quad x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1, \quad x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Замечание. Достаточно считать, что непрерывна функция L и ее производные $\dfrac{\partial L}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial L}{\partial y}$. Чтобы убедиться в этом, полезно доказать еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2 . (лемма Дюбуа-Реймона)
Если $a_0(\cdot), \ a_1(\cdot) \in C([t_0, t_1])$ и

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[a_0(t)\, h(t) + a_1(t)\, h'(t)\right] dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_0^1,$$

то $a_1(\cdot) \in C^1$ и $a_0(t) - a_1'(t) = 0 \ \forall t \in (t_0, t_1)$.

Доказательство (см. [6]). Пусть $p(\cdot) \in C^1$, причем $p'(t) = a_0(t)$ и $\int\limits_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)\, dt$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [a_1(t) - p(t)] h'(t)\, dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_0^1.$$

Пусть $q(\cdot) \in C^1$, причем $q'(t) = a_1(t) - p(t)$ и $q(t_0) = 0$. Тогда

$$q(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} q'(t)\, dt = 0.$$

Положим $h(\cdot)=q(\cdot)$ и получим, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}[a_1(t)-p(t)]^2\,dt=0.$$

Отсюда следует, что $a_1(t)=p(t)$, т. е. $a_1(\cdot)\in C^1$ и $a_1'(t)=a_0(t)$. $\bullet$

2.2. Задача Больца

В *задаче Больца*

$$\mathrm{B}\,[x(\cdot)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))\,dt+l(x(t_0),x(t_1))\to\mathrm{extr},\quad x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1]) \tag{3}$$

функционал состоит из двух слагаемых: интегральной части и терминальной части. Дополнительных ограничений нет.

Теорема 2 . (необходимое условие экстремума 1-го порядка в задаче Больца) *Пусть функции $L(t,x,y)$ и $l(x_0,x_1)$ имеют непрерывные производные. Если функция $x^0(\cdot)$ — решение задачи (3), то она удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера (2) и условиям трансверсальности*

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t_0,x(t_0),x'(t_0))=\frac{\partial l}{\partial x_0}(x(t_0),x(t_1)),\qquad \frac{\partial L}{\partial y}(t_1,x(t_1),x'(t_1))=-\frac{\partial l}{\partial x_1}(x(t_0),x(t_1)). \tag{4}$$

Доказательство. Вычислим вариацию функционала не предполагая, что $h(t_0)=0,\ \ h(t_1)=0$ и приравняем ее нулю. Получим

$$\delta\mathrm{B}\,[x(\cdot);h(\cdot)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\{\frac{\partial L}{\partial x}(t,x(t),x'(t))-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial y}(t,x(t),x'(t))\Big\}\,h(t)\,dt+$$

$$+\frac{\partial L}{\partial y}(t,x(t),x'(t))h(t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\frac{\partial l}{\partial x_0}(x(t_0),x(t_1))h(t_0)+\frac{\partial l}{\partial x_1}(x(t_0),x(t_1))h(t_1)=0.$$

Если $h(\cdot)\in C_0^1$, то отсюда сразу следует (2). Если $h(t_0)\neq0,\ \ h(t_1)=0$ или $h(t_0)=0,\ \ h(t_1)\neq0$, то получим (4). $\bullet$

Пример.

$$\mathrm{B}\,[x(\cdot)]=\int\limits_0^1[x'^2(t)-x(t)]\,dt+x^2(1)\to\mathrm{extr}.$$

Из уравнения Эйлера $2x''+1=0$ и условий трансверсальности $x'(0)=0,\ x'(1)=-x(1)$ легко получить, что решением задачи Больца может быть только функция $x^0(t)=\dfrac{3-t^2}{4}$.

Как узнать, действительно ли она является искомым решением? Нужно убедиться, что

$$\mathrm{B}\,[x^0(\cdot)+h(\cdot)]-\mathrm{B}\,[x^0(\cdot)]\geq0.$$

Одновременно выяснится, что функция $x^0(\cdot)$ доставляет минимум.

2.3. Изопериметрическая задача

Пусть

$$\mathrm{I}_j[x(\cdot)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}L_j(t,x(t),x'(t))\,dt,\quad j=0..m.$$

Рассмотрим *изопериметрическую задачу*

$$\mathrm{I}_0[x(\cdot)]=\to\mathrm{extr},\quad \mathrm{I}_j[x(\cdot)]=c_j,\ j=1..m,\quad x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1,\quad x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1]). \tag{5}$$

Теорема 3 . (правило множителей Лагранжа)
Пусть функции L_j, $\dfrac{\partial L_j}{\partial x}$, $\dfrac{\partial L_j}{\partial y}$ *непрерывны. Если* $x^0(\cdot)$ *– решение задачи (5), то найдутся такие числа* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *(не равные нулю одновременно), что* $x^0(\cdot)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера (2), составленному для функции*

$$L(t,x,y) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \, L_j(t,x,y).$$

Доказательство. Ограничимся случаем $m = 1$.
Вычислим вариации $\delta \mathrm{I}_0[x^0(\cdot); h(\cdot)]$ и $\delta \mathrm{I}_1[x^0(\cdot); h(\cdot)]$.
Если $\delta \mathrm{I}_1[x^0(\cdot); h(\cdot)] = 0 \ \ \forall h(\cdot) \in C_0^1$, то можно выбрать $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = 1$ (вырожденный случай).
Пусть теперь $\exists g(\cdot) \in C_0^1 \ \ | \ \ \delta \mathrm{I}_1[x^0(\cdot); g(\cdot)] \neq 0$. Пусть $h(\cdot) \in C_0^1$. Рассмотрим две функции вещественных аргументов α и β:

$$\varphi(\alpha,\beta) = \mathrm{I}_0[x^0(\cdot) + \alpha h(\cdot) + \beta g(\cdot)], \quad \psi(\alpha,\beta) = \mathrm{I}_1[x^0(\cdot) + \alpha h(\cdot) + \beta g(\cdot)].$$

Их значения в точке $(0,0) : \varphi(0,0) = \mathrm{I}_0[x^0(\cdot)]$, $\psi(0,0) = \mathrm{I}_1[x^0(\cdot)]$. Эти функции непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(0,0)$, легко вычислить значения их частных производных в этой точке.
Предположим, что

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(\alpha,\beta)}(0,0) \neq 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_0^1.$$

По теореме об обратной функции в окрестности точки $(0,0)$ существует гладкое отображение $(\alpha,\beta) \mapsto (\varphi(\alpha,\beta), \psi(\alpha,\beta))$, причем $(0,0) \mapsto (\varphi(0,0), \psi(0,0))$. Тогда функция $x^0(\cdot)$ не может быть решением изопериметрической задачи, так как можно подобрать такие значения α и β, что или $\varphi(\alpha,\beta) > \mathrm{I}_0[x^0(\cdot)]$, или $\varphi(\alpha,\beta) < \mathrm{I}_0[x^0(\cdot)]$, но $\psi(\alpha,\beta) = \mathrm{I}_1[x^0(\cdot)]$. Поэтому

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(\alpha,\beta)}(0,0) = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_0^1$$

или

$$\delta \mathrm{I}_0[x^0(\cdot); h(\cdot)] - \frac{\delta \mathrm{I}_0[x^0(\cdot); g(\cdot)]}{\delta \mathrm{I}_1[x^0(\cdot); g(\cdot)]} \, \delta \mathrm{I}_1[x^0(\cdot); h(\cdot)] = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{\delta \mathrm{I}_0[x^0(\cdot); g(\cdot)]}{\delta \mathrm{I}_1[x^0(\cdot); g(\cdot)]}.$$

Идею доказательства предложил Эйлер в 1744 году. •

Пример. Задача Дидоны.

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt \to \max, \quad \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2(t)}\,dt = l, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1.$$

2.4. Задача с подвижными концами

2.5. Расширение класса искомых функций

Литература

1. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.
4. Буслаев В.С. Вариационное исчисление.
5. Коша А. Вариационное исчисление.
6. Галеев Э.М. Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: МГУ, 1996.

3. Интегральное вариационное исчисление

Основная идея: заменим в задачах КВИ операторы дифференцирования на интегральные операторы. Следует ожидать, что необходимые условия экстремума примут форму интегральных уравнений.

3.1. Простейшая задача ИВИ

Рассмотрим *интегральный функционал*

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] = \int\limits_a^b f(t, x(t), (\mathrm{K}\,x)(t))\,dt, \quad \text{где} \quad (\mathrm{K}\,x)(t) = \int\limits_a^b k(\tau, t, x(\tau))\,d\tau, \quad t \in [a,b]$$

– *интегральный оператор Урысона.*

Будем предполагать, что заданные функции $f(t,x,y)$, $k(\tau,t,x)$ непрерывны по совокупности переменных. Будем искать экстремумы функционала (1) в пространстве непрерывных функций $C([a,b])$ с нормой

$$||x(\cdot)|| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Назовем *простейшей задачей ИВИ* экстремальную задачу

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] \to extr, \quad x(\cdot) \in C([a,b]). \tag{1}$$

Лемма 1. (основная лемма ИВИ)
Пусть $a(\cdot) \in C([a,b])$. *Если*

$$\int\limits_a^b a(t)\,h(t)\,dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C([a,b]),$$

то $a(t) \equiv 0$.

Это утверждение доказывается тем же способом, что и лемма Лагранжа КВИ. •

Аналогом *леммы Дюбуа-Реймона* является

Лемма 2. *Пусть* $c(\cdot), d(\cdot) \in C([a,b])$, $k(\cdot,\cdot) \in C([a,b]\times[a,b])$. *Если*

$$\int\limits_a^b \Big[c(t)h(t) + d(t)\int\limits_a^b h(\tau)k(\tau,t)\,d\tau\Big]\,dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C([a,b]),$$

то

$$c(t) + \int\limits_a^b d(\tau)k(t,\tau)\,d\tau \equiv 0.$$

Чтобы это доказать, нужно переставить интегралы в левой части условия и применить лемму 1. •

Теорема 1. (необходимое условие экстремума в простейшей задаче ИВИ)
Пусть функции $k(\tau,t,x)$, $\dfrac{\partial k}{\partial x}$, $f(t,x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны по совокупности переменных. Если функция* $x(\cdot)$ *– решение задачи (1), то она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), (Kx)(t)) + \int\limits_a^b \frac{\partial k}{\partial x}(t,\tau,x(t))\ \frac{\partial f}{\partial y}(\tau, x(\tau), (Kx)(\tau))\,d\tau = 0, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Доказательство. Вычислим первую вариацию функционала

$$\delta \mathrm{I}\,[x(\cdot);h(\cdot)] = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),(\mathrm{K}\,x)(t))\,h(t)\,dt + \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t,x(t),(\mathrm{K}\,x)(t)) \int\limits_a^b \frac{\partial k}{\partial x}(\tau,t,x(\tau))\,h(\tau)\,d\tau\;dt.$$

Изменим порядок интегрирования во втором слагаемом и переобозначим переменные интегрирования. Тогда

$$\delta \mathrm{I}\,[x(\cdot);h(\cdot)] = \int\limits_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),(\mathrm{K}\,x)(t)) + \int\limits_a^b \frac{\partial k}{\partial x}(t,\tau,x(t))\,\frac{\partial f}{\partial y}(\tau,x(\tau),(\mathrm{K}\,x)(\tau))\,d\tau\Big] h(t)\,dt.$$

Приравняем нулю вариацию и применим лемму 1. (Лемму 2 можно было бы использовать еще до перестановки интегралов). •

Замечание. Как и ожидалось, аналогом уравнения Эйлера в простейшей задаче интегрального вариационного исчисления является интегральное уравнение. В отличие от классического вариационного исчисления, при выводе необходимого условия экстремума в простейшей задаче вместо интегрирования по частям используется перестановка интегралов в повторном интеграле. В постановке простейшей задачи ИВИ нет дополнительных условий вида $x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1$.

Замечание. Утверждение теоремы 1 остается в силе для таких интегральных функционалов и для таких классов функций, когда 1) существует вариация функционала (1); 2) можно изменить порядок интегрирования в повторном интеграле; 3) сохраняется утверждение аналога основной леммы вариационного исчисления.

Следствие 1. *Если*

$$(K\,x)(t) = \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau, \quad t\in[a,b],$$

то аналог уравнения Эйлера (2) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),(K\,x)(t)) + \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(\tau,x(\tau),(K\,x)(\tau))\,k(t,\tau)\,d\tau = 0, \quad t\in[a,b].$$

Замечание. Если в интегральном операторе K использовать интеграл с переменным верхним пределом (то есть $k(\tau,t)=0$ при $\tau>t$), то в аналоге уравнения Эйлера будет стоять интеграл с переменным нижним пределом.

Следствие 2. *Если*

$$f(t,x,y) = A(t)x^2 + 2B(t)xy + C(t)y^2 - 2D(t)x - 2E(t)y,$$

то уравнение (2) становится линейным интегральным уравнением с симметричным ядром

$$A(t)x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,L(\tau,t)\,d\tau = g(t), \quad t\in[a,b], \tag{3}$$

где

$$L(\tau,t) = B(\tau)\,k(\tau,t) + B(t)\,k(\tau,t) + \int\limits_a^b C(\xi)\,k(\tau,\xi)\,k(t,\xi)\,d\xi,$$

$$g(t) = D(t) + \int\limits_a^b E(\tau)\,k(t,\tau)\,d\tau.$$

В этом частном случае легко получить следующее утверждение.

Теорема 2. (достаточное условие экстремума)
Пусть функционал в простейшей задаче ИВИ квадратичный и интегральный оператор линейный. Если

$$\int\limits_a^b \Big[A(t)\,h^2(t) + 2B(t)\,h(t)\,(Kh)(t) + C(t)\,(Kh)^2(t)\Big]\,dt \geq 0 \quad \forall h(\cdot) \in C([a,b]),$$

то любое решение интегрального уравнения (3) доставляет минимум в простейшей задаче.

Действительно,

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)+h(\cdot)] - \mathrm{I}\,[x(\cdot)] = 2\int\limits_a^b h(t)\Big[A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,L(\tau,t)\,d\tau - g(t)\Big]\,dt +$$

$$+\int\limits_a^b \Big[A(t)\,h^2(t) + 2B(t)\,h(t)\,(\mathrm{K}\,h)(t) + C(t)\,(\mathrm{K}\,h)^2(t)\Big]\,dt. \bullet$$

Замечание. Если интегральный оператор K имеет *вырожденное ядро*, то и интегральное уравнение (3) имеет вырожденное ядро.

Пример 1. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)] = \int\limits_a^b \Big[A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau - f(t)\Big]^2 dt \to \min, \quad x(\cdot) \in C([a,b]).$$

Эту задачу можно понимать так: найти функцию $x(\cdot)$, при которой левая часть интегрального уравнения

$$(\mathrm{K}\,x)(t) = A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau = f(t), \quad t \in [a,b]$$

наиболее близка (в смысле квадратического среднего) к его правой части. Условие теоремы 2 в данном случае выполняется. Поэтому функция $x(\cdot)$ является решением задачи тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b \Big[A(t)\,x(t) + \int\limits_a^b x(\tau)\,k(\tau,t)\,d\tau - f(t)\Big]\,k(\xi,t)\,dt = 0$$

или

$$\mathrm{K}\,'((\mathrm{K}\,x)(t) - f(t))(\xi) = 0,$$

где

$$(\mathrm{K}\,'y)(t) = A(t)\,y(t) + \int\limits_a^b y(\tau)\,k(t,\tau)\,d\tau, \qquad t \in [a,b]$$

– транспонированный (союзный) оператор.

Так как функционал выпуклый, то решение $x^0(\cdot)$ экстремальной задачи существует. Следовательно, или $\mathrm{K}\,x^0 = f$, или функция $y = \mathrm{K}\,x^0 - f$ является нетривиальным решением транспонированного однородного уравнения $\mathrm{K}\,'y = 0$. Это – первая теорема Фредгольма (альтернатива Фредгольма).

Рассмотрим подробнее случай, когда транспонированное однородное уравнение $\mathrm{K}'y = 0$ имеет ненулевое решение $y(\cdot)$. Тогда, как было установлено выше, $\mathrm{K}\,x^0 = f + y$. Это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_a^b [f(t) + y(t)]\, y_j(t)\, dt = 0, \quad j = 1..n,$$

где $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ – полная система независимых решений однородного транспонированного уравнения (третья теорема Фредгольма). Будем считать, что эта система решений ортономирована. Поэтому $y(\cdot) = c_1 y_1(\cdot) + \ldots + c_n y_n(\cdot)$, где

$$c_j = \int\limits_a^b y(t)\, y_j(t)\, dt, \quad j = 1..n.$$

Тогда

$$c_j = -\int\limits_a^b f(t)\, y_j(t)\, dt, \quad j = 1..n.$$

Следовательно, минимальное значение функционала

$$min\,\mathrm{I} = \mathrm{I}\,[x^0(\cdot)] = \int\limits_a^b y^2(t)\, dt = \sum_{j=1}^n c_j^2 = \sum_{j=1}^n \Big(\int\limits_a^b f(t)\, y_j(t)\, dt\Big)^2.$$

Таким образом, значения интегралов

$$\int\limits_a^b f(t)\, y_j(t)\, dt$$

не только определяют, разрешимо ли неоднородное линейное интегральное уравнение при заданной правой части, но и показывают, насколько можно приблизить левую часть уравнения к правой части, если уравнение решений не имеет.

3.2. Аналог задачи Больца

Добавим к интегральному функционалу простейшей задачи (1) *терминальную часть*

$$\mathrm{T}\,[x(\cdot)] = F\Big(x(t_1), ..., x(t_n), \int\limits_a^b k_1(\tau, x(\tau))\, d\tau, ..., \int\limits_a^b k_m(\tau, x(\tau))\, d\tau\Big),$$

где $t_1, \ldots, t_n$ – фиксированные точки на отрезке $[a, b]$ и $k_1(\tau, x), \ldots k_m(\tau, x)$ – заданные непрерывные функции. Аналогом *задачи Больца* КВИ является следующая задача:

$$\mathrm{B}\,[x(\cdot)] = \mathrm{I}\,[x(\cdot)] + \mathrm{T}\,[x(\cdot)] \to extr, \quad x(\cdot) \in C([a, b]). \tag{4}$$

Теорема 3. (необходимое условие экстремума для аналога задачи Больца)
Пусть функции $f,\ k,\ F,\ k_j,\ j = 1..m$ *и их частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial k}{\partial x},\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j},\ j = 1..n,$ $\dfrac{\partial F}{\partial y_j},\ j = 1..m$ *непрерывны по совокупности переменных. Если функция* $x^0(\cdot)$ *– решение задачи (4), то она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t) + \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(s) \frac{\partial k}{\partial x}(t, s, x(t)) ds + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_j}(\ldots) \frac{\partial k_j}{\partial x}(t, x(t)) = 0 \tag{5}$$

и выполняются условия

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}\Big(x(t_1),...,x(t_n),\int\limits_a^b k_1(\tau,x(\tau))d\tau,...,\int\limits_a^b k_m(\tau,x(\tau))d\tau\Big)=0,\quad j=1..n,\tag{6}$$

здесь для краткости записи не указаны аргументы у производных $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}$ *и обозначено*

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(t)=\frac{\partial f}{\partial \xi}\Big(t,x(t),\int\limits_a^b k(\tau,t,x(\tau))d\tau\Big),\quad \xi=x \text{ или } y.$$

Доказательство. Вычислим вариацию функционала в задаче (4) и приравняем ее нулю. Лемма 1 допускает следующую модификацию.

Лемма 1*.
Пусть $a(\cdot)\in C([a,b])$. *Если*

$$\int\limits_a^b a(t)\,h(t)\,dt=0\quad \forall h(\cdot)\in C([a,b])\ \mid\ h(t_j)=0,\ j=1..n,$$

то $a(t)\equiv 0$.

Отсюда следует интегральное уравнение (5). Если же рассматривать такие функции $h(\cdot)$, что $h(t_j)\neq 0$ только для одной из точек t_j, то получим условия (6). •

Рассмотрим два частных случая аналога задачи Больца.

А. Если терминальная часть функционала Больца не зависит от переменных y_j, $j=1..m$, то необходимые условия экстремума (5) и (6) становятся независимыми.

Следствие 3. (первый частный случай)
Пусть выполнены условия теоремы 3. Непрерывная функция $x(\cdot)$ *доставляет локальный минимум (максимум) функционалу*

$$B(x(\cdot))=I(x(\cdot))+F(x(t_1),...,x(t_n))$$

тогда и только тогда, когда
1) функция $x(\cdot)$ *доставляет локальный минимум (максимум) функционалу* $I(x(\cdot))$ *и*
2) вектор $(x(t_1),...,x(t_n))$ *доставляет локальный минимум (максимум) функции* $F(x_1,...,x_n)$.

Б. Пусть терминальная часть функционала Больца не зависит от переменных x_j, $j=1..n$.

Следствие 4. (второй частный случай)
Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}=0\quad \forall j=1..n$. *если функция* $x^0(\cdot)$ *– решение задачи (4), то она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t)+\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(s)\frac{\partial k}{\partial x}(t,s,x(t))ds+\sum_{j=1}^m\frac{\partial F}{\partial y_j}(\ldots)\frac{\partial k_j}{\partial x}(t,x(t))=0.$$

Замечание. Во втором частном случае в интегральном уравнении не содержатся значения $x(t_j)$, $j=1..n$. Поэтому можно расширить класс искомых функций до пространства $L(a,b)$.

Пример 2.

3.3. Изопериметрическая задача

Пусть

$$\mathrm{I}_j[x(\cdot)] = \int\limits_a^b f_j(t, x(t), (K_j x)(t))\,dt, \quad j = 0..m.$$

Рассмотрим изопериметрическую задачу

$$\mathrm{I}_0[x(\cdot)] = \!\!\longrightarrow extr, \quad \mathrm{I}_j[x(\cdot)] = c_j,\ j = 1..m, \quad x(\cdot) \in C([a,b]). \tag{7}$$

Теорема 6. (правило множителей Лагранжа)
Пусть все заданные функции и их частные производные непрерывны. Если $x^0(\cdot)$ – решение задачи (7), то найдутся такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (не равные нулю одновременно), что $x^0(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2), составленному для функции

$$f(t, x, y) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j\, f_j(t, x, y).$$

Если функционалы $I_j[\cdot]$, $j = 1..m$ не имеют стационарных точек, то можно считать, что $\lambda_0 = 1$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из общего правила множителей Лагранжа. •

Пример 3. Распределение нагрузки вдоль струны.

Пусть концы упругой струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Если вдоль струны распределена сила $p(\cdot)$, то отклонение струны от положения равновесия (рассматриваются только малые отклонения)

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \left\{ \frac{x(l-\xi)}{T_0 l},\ 0 \le x \le \xi, \quad \frac{(l-x)\xi}{T_0 l},\ \xi \le x \le l \right\},$$

T_0 – натяжение ненагруженной струны.

Будем искать такое распределение силы $p(\cdot)$, при котором струна примет форму $u(\cdot)$, наиболее близкую к заданной $u_0(\cdot)$, при условии, что суммарная нагрузка на струну постоянна:

$$\int\limits_0^l \Big[u(x) - u_0(x)\Big]^2 dx \to \min, \qquad \int\limits_0^l p(\xi) d\xi = C.$$

Если подставим выражение $u(\cdot)$ через $p(\cdot)$ в функционал, то получим изопериметрическую задачу ИВИ. В соответствии с утверждением теоремы 6, необходимые и достаточные условия экстремума имеют вид

$$\frac{\lambda}{2} + \int\limits_0^l p(\xi) H(\xi, x) d\xi = \int\limits_0^l u_0(\xi) G(x, \xi) d\xi, \quad \int\limits_0^l p(\xi) d\xi = C,$$

где λ – множитель Лагранжа,

$$H(\xi, x) = \int\limits_0^l G(x, t) G(t, \xi) dt, \quad \xi, x \in [0, l].$$

В этой задаче функционал

$$\int\limits_0^l p(\xi)\, d\xi$$

не имеет стационарных точек. Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода вместе с дополнительным условием могут быть решены численно методом регуляризации А.Н.Тихонова.

Пример 4. Распределение нагрузки вдоль мембраны.

Пусть упругая мембрана закреплена вдоль сторон прямоугольника $[0,a]\times[0,b]$. Ее отклонение от положения равновесия под действием распределенной силы $p(\cdot,\cdot)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=p(x,y),$$

$$u=0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\ \text{ при }\ x=0,\ \ x=a,\quad u=0,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \text{ при }\ y=0,\ \ y=b.$$

Это решение может быть записано в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\,\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,\sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\,\sin\dfrac{n\pi\eta}{b}}{\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\right]p(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

(в квадратных скобках стоит функция Грина задачи, определяющая прогиб мембраны под действием сосредоточенной единичной силы, приложенной в точке (ξ,η)). Тогда исходная задача может быть сформулирована как изопериметрическая задача ИВИ

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b[u(x,y)-u_0(x,y)]^2\,dx\,dy\to min,\qquad \int\limits_0^a\int\limits_0^b p(x,y)\,dx\,dy=C.$$

3.4. Классы искомых функций

Исследуем связь между задачами КВИ и задачами ИВИ.

Рассмотрим простейшую задачу классического вариационного исчисления

$$\mathrm{I}\,[x(\cdot)]\equiv\int\limits_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))\,dt\to extr,\quad x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1,\quad x(\cdot)\in C^1([t_0,t_1]).$$

Введем новую искомую функцию $y(\cdot)=x'(\cdot)$, тогда

$$x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}y(\tau)d\tau+x_0,\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{8}$$

Простейшая задача КВИ равносильна изопериметрической задаче ИВИ

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}L\Big(t,\int\limits_{t_0}^{t}y(\tau)d\tau+x_0,y(t)\Big)dt\to extr,\quad \int\limits_{t_0}^{t_1}y(\tau)d\tau=x_1-x_0,\quad x(\cdot)\in C([t_0,t_1]).$$

Второй функционал не имеет стационарных точек, поэтому можно выбрать множитель Лагранжа $\lambda_0=1$. Тогда необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial y}\Big(t,\int\limits_{t_0}^{t}y(\tau)d\tau+x_0,y(t)\Big)+\int\limits_{t}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}\Big(\tau,\int\limits_{t_0}^{\tau}y(\xi)d\xi+x_0,y(\tau)\Big)d\tau+\lambda=0.$$

При $t=t_1$ найдем значение

$$\lambda=-\frac{\partial L}{\partial y}\Big(t_1,\int\limits_{t_0}^{t_1}y(\tau)d\tau+x_0,y(t_1)\Big)=-\frac{\partial L}{\partial y}\Big(t_1,x_1,y(t_1)\Big).$$

Вернемся к старой искомой функции. Получим необходимое условие экстремума (интегральный аналог уравнения Эйлера)

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t,x(t),x'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t,x_1,x'(t_1)) + \int\limits_t^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau = 0.$$

Если потребовать дополнительно, что функция $L(t,x,y)$ имеет непрерывные вторые частные производные, то это уравнение можно переписать в виде

$$\int\limits_t^{t_1} \Big[\frac{\partial L}{\partial x}(\tau,x(\tau),x'(\tau)) - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial y}(\tau,x(\tau),x'(\tau))\Big]d\tau = 0.$$

Дифференцируя по t, легко получить классическое уравнение Эйлера – необходимое условие экстремума в простейшей задаче КВИ.

Легко видеть, что любая задача КВИ приводится к задаче ИВИ с дополнительным изопериметрическим условием.

Уточним, в каких классах можно рассматривать искомые функции.

Пусть равенство (8) устанавливает соответствие между функциями $x(\cdot)$ из некоторого пространства X и функциями $y(\cdot)$ из некоторого пространства Y. Исследуем, как согласованы друг с другом различные способы задания окрестностей элементов в X и Y.

А. Пусть $X = C^1([a,b])$ и окрестности в пространстве определяются с помощью нормы

$$||x(\cdot)||_{C^1} = \max\Big\{\max_{t\in[a,b]}|x(t)|, \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|\Big\}$$

(слабые окрестности на языке КВИ). В этом случае $Y = C([a,b])$ и стандартная норма

$$||y(\cdot)||_C = \max_{t\in[a,b]}|y(t)|$$

задает в пространстве Y окрестности, согласованные с окрестностями в X. Это следует из неравенств:

$$||y(\cdot)-y_0(\cdot)||_C \le ||x(\cdot)-x_0(\cdot)||_{C^1},$$

$$||x(\cdot)-x_0(\cdot)||_{C^1} = \max\Big\{\max_{t\in[a,b]}|\int\limits_{t_0}^{t}[y(\tau)-y_0(\tau)]d\tau|, \max_{t\in[a,b]}|y(t)-y_0(t)|\Big\} \le$$

$$\le \max(b-a,1)\ ||y(\cdot)-y_0(\cdot)||_C.$$

Если же окрестности в пространстве $X = C^1([a,b])$ задает неравенство $\|x(\cdot)-x_0(\cdot)\|_C < \varepsilon$ (сильные окрестности), то можно определить окрестности в пространстве $Y = C([a,b])$ так: $\|y(\cdot)-y_0(\cdot)\|_C < \varepsilon$. В этом случае если $y(\cdot)$ – решение экстремальной задачи в Y, то $x(\cdot)$ – решение экстремальной задачи в X, но не наоборот.

Б. Аналогичная ситуация имеет место, если $X = AC([a,b])$ (пространство абсолютно непрерывных функций) и $Y = L_1(a,b)$. Пусть

$$||y(\cdot)-y^0(\cdot)||_{L_1} = \int\limits_a^b |y(t)-y^0(t)|\,dt, \qquad ||x(\cdot)-x^0(\cdot)||_{AC} = |x(t_0)-x^0(t_0)| + ||x'(\cdot)-(x^0)'(\cdot)||_{L_1}.$$

Определенные таким способом окрестности согласованы, так как

$$||y(\cdot)-y^0(\cdot)||_{L_1} = ||x'(\cdot)-(x^0)'(\cdot)||_{L_1} \le ||x(\cdot)-x^0(\cdot)||_{AC}, \quad ||x(\cdot)-x^0(\cdot)||_{AC} = ||y(\cdot)-y^0(\cdot)||_{L_1}.$$

Пример 5. Еще раз рассмотрим пример Гильберта

$$\int\limits_0^1 t^{2/3}[x'(t)]^2dt \to min, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1,$$

с помощью которого было установлено, что в задачах КВИ пространство C^1 является слишком узким.

Введем новую искомую функцию $y(t) = x'(t)$ и будем искать решения изопериметрической задачи ИВИ в пространстве AC. Необходимое условие экстремума

$$2t^{2/3}y(t) + \lambda = 0,$$

из изопериметрического условия находим $\lambda = -2/3$ и тогда $y(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}$. Следовательно, $x(t) = t^{1/3}$ – функция из L.

3.5. Задача с подвижными концами

Рассмотрим задачу с подвижными концами КВИ

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))\, dt \to extr, \quad x(t_0) = \varphi_0(t_0),\ x(t_1) = \varphi_1(t_1), \quad x(\cdot) \in C^1, \tag{9}$$

здесь значения $t_0,\ t_1$ неизвестны (предполагаем, что эти точки принадлежат некоторому достаточно широкому интервалу $\Delta \subset R^1$). Функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi_1(\cdot)$ заданы. Смысл дополнительных ограничений в том, что концы $x(t_0)$ и $x(t_1)$ искомой траектории движутся по линиям $x = \varphi_0(t)$ и $x = \varphi_1(t)$.

Перейдем к задаче ИВИ

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau, y(t))\, dt \to extr, \qquad \int_{t_0}^{t_1} y(\tau)\, d\tau = \varphi_1(t_1) - \varphi_0(t_0), \quad y(\cdot) \in C.$$

Составим функцию Лагранжа (второй функционал не имеет стационарных точек)

$$\mathrm{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau, y(t))\, dt + \lambda\Big[\int_{t_0}^{t_1} y(\tau)\, d\tau - \varphi_1(t_1) + \varphi_0(t_0)\Big],$$

искомыми величинами являются $y(\cdot),\ t_0,\ t_1$. Приравняем нулю производные по всем этим переменным.

1. Если $\delta\mathrm{L}\,[y(\cdot); h(\cdot)] = 0$, то

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, \ldots) + \int_{t}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(\tau, \ldots)\, d\tau + \lambda = 0,$$

отсюда при $t = t_1$ получим

$$\lambda = -\frac{\partial L}{\partial y}(t_1, \ldots).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau + \varphi_0(t_0), y(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t_1, \varphi_1(t_1), y(t_1)) + \int_{t}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(\tau, \ldots)\, d\tau = 0. \tag{10}$$

2. Если $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t_0} = 0$, то

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}(t, \ldots)[\varphi_0'(t_0) - y(t_0)]\, dt - L(t_0, \varphi_0(t_0), y(t_0)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t_1, \ldots)[\varphi_0'(t_0) - y(t_0)] = 0.$$

Запишем равенство (10) при $t = t_0$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t_0, \varphi_0(t_0), y(t_0)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t_1, \varphi_1(t_1), y(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}(\tau, \int_{t_0}^{\tau} y(\xi)\, d\xi + \varphi_0(t_0), y(\tau))\, d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что

$$L(t_0, \varphi_0(t_0), y(t_0)) + [\varphi_0'(t_0) - y(t_0)] \frac{\partial L}{\partial y}(t_0, \varphi_0(t_0), y(t_0)) = 0. \tag{11}$$

3. Если $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t_1} = 0$, то с помощью таких же рассуждений получим

$$L(t_1, \varphi_1(t_1), y(t_1)) + [\varphi_1'(t_1) - y(t_1)] \frac{\partial L}{\partial y}(t_1, \varphi_1(t_1), y(t_1)) = 0. \tag{12}$$

Теорема 7. (необходимые условия экстремума в задаче с подвижными концами)
Если $y(\cdot)$, t_0, t_1 – решение задачи (9), то выполняются условия (10), (11) и (12).